Ю. И. МАНИН

Калибровочные поля и комплексная геометрия

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.15
М 24
УДК 513.7

Манин Ю. И. **Калибровочные поля и комплексная геометрия.**— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 336 с.

Книга посвящена изложению математических результатов, полученных в последнее десятилетие в теории классических калибровочных полей, т. е. связностей в расслоениях. Изложен метод преобразования Радона — Пенроуза и его приложения к конструкциям автодуальных решений уравнений Янга — Миллса и Эйнштейна. Дано введение в геометрическую теорию суперсимметричных уравнений.

Для специалистов по математике и математической физике. Представляет интерес также для физиков.

Рецензент
кандидат физико-математических наук *С. Г. Гиндикин*

Юрий Иванович Манин

КАЛИВРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*. Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 12385

Сдано в набор 28.12.83 Подписано к печати 29.08.84 Формат 84×108$^1/_{32}$. Бумага тип. № 2. Обыкновенная гарнитура Высокая печать. Усл. печ. л 17.64. Усл. кр.-отт. 17,64. Уч.-изд. л. 20,24. Тираж 6000 экз. Заказ № 15. Цена 2 р. 70 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

М $\frac{1702040000-147}{053(02)-84}$ 23—84

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Введение. Геометрические структуры теории поля 7

Глава 1. **Грассманианы, связности и интегрируемость** . . 14

§ 1. Грассманианы и пространства флагов 14
§ 2. Когомологии пространств флагов 25
§ 3. Квадрика Клейна и пространство Минковского . . 32
§ 4. Распределения и связности 45
§ 5. Интегрируемость и кривизна 52
§ 6. Конические структуры и конические связности . . 57
§ 7. Грассмановы спиноры и обобщенные уравнения автодуальности 64
Литературные указания к главе 1 73

Глава 2. **Преобразование Радона — Пенроуза** 74

§ 1. Комплексное пространство-время 74
§ 2. Диаграмма автодуальности и преобразование Радона — Пенроуза 87
§ 3. Теория инстантонов 97
§ 4. Инстантоны и модули над грассмановой алгеброй . . 117
§ 5. Диаграмма нуль-геодезических 126
§ 6. Продолжения и препятствия 134
§ 7. Кривизна на пространстве нуль-геодезических . . 146
§ 8. Когомологические вычисления 150
§ 9. Ток поля Янга — Миллса на пространстве нуль-геодезических 156
§ 10. Задачи продолжения и динамические уравнения . . 165
§ 11. Функция Грина оператора Лапласа 171
Литературные указания к главе 2 175

Глава 3. **Введение в супералгебру** 178

§ 1. Правило знаков 178
§ 2. Тензорная алгебра над суперкоммутативным кольцом 186
§ 3. Суперслед и супердетерминант 191
§ 4. Некоторые комплексы в супералгебре 195
§ 5. Скалярные произведения 200
§ 6. Вещественные структуры 203
Литературные указания к главе 3 209

Глава 4. **Введение в супергеометрию** 210

§ 1. Суперпространства и супермногообразия 210
§ 2. Элементарная структурная теория супермногообразий 218

§ 3. Суперграссманианы и суперпространства флагов . . 223
§ 4. Теорема Фробениуса и связности 237
§ 5. Правые связности и интегральные формы 239
§ 6. Интеграл Березина 247
§ 7. Плотности 251
§ 8. Формула Стокса и когомологии интегральных форм 256
§ 9. Супермногообразия с отмеченными формами объема. Псевдодифференциальные и псевдоинтегральные формы 258
§ 10. Супералгебры Ли векторных полей и конечномерные простые супералгебры Ли 262
Литературные указания к главе 4 268

Глава 5. Геометрические структуры суперсимметрии и супергравитации 269

§ 1. Супертвисторы и суперпространство Минковского . . 269
§ 2. Скалярные суперполя и компонентный анализ . . 278
§ 3. Поля Янга — Миллса и уравнения интегрируемости вдоль световых супергеодезических 280
§ 4. Монады на суперпространствах и ЯМ-пучки . . . 292
§ 5. Некоторые вычисления в координатах 303
§ 6. Суперпространства флагов классического типа и экзотические суперпространства Минковского . . . 307
§ 7. Геометрия простой супергравитации 319
Литературные указания к главе 5 329

Литература 330

Предметный указатель 336

So here I am, in the middle way, having had twenty years —
Twenty years largely wasted, the years of *l'entre deux guerres* —
Trying to learn to use words, and every attempt
Is a wholly new start, and a different kind of failure,
Because one has only learnt to get the better of words
For the thing one no longer has to say, or the way in which
One is no longer disposed to say it.

T. S. Eliot. Four Quartets

ПРЕДИСЛОВИЕ

Семидесятые годы стали этапным десятилетием в физике элементарных частиц. На Токийской конференции 1978 года была окончательно признана как выдержавшая критические эксперименальные проверки стандартная модель Вайнберга — Салама, которая объединила слабые и электромагнитные взаимодействия в рамках спонтанно нарушенной калибровочной $SU(2)_L \times U(1)$-симметрии. Квантовая хромодинамика кварков и глюонов, основанная на строгой калибровочной $SU(3)_c$-симметрии, также постепенно приобрела в общественном мнении статус правильной теории сильных взаимодействий, несмотря на отсутствие теоретического объяснения конфайнмента. Работы Политцера и Гросса — Вильчека 1974 года, установившие асимптотическую свободу кварков на малых расстояниях, способствовали этому признанию. В то же время успехи этих двух моделей всегда рассматривались лишь как промежуточное состояние на пути к объединенной теории всех взаимодействий, включая гравитационное. Совершенно неожиданный шаг в этом направлении также был сделан в минувшем десятилетии — с открытием суперсимметрии, перемешивающей бозоны и фермионы, и обнаружением того, что локализация суперсимметрии с необходимостью приводит к искривлению пространства-времени и учету гравитации.

Естественно, что сотрудничество физиков и математиков, столь же традиционное, как и трудности взаимного понимания, получило в эти годы новый импульс.

В техническом плане, вероятно, самым существенным оказалось открытие новых методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Знаменитый метод обратной задачи рассеяния эффективен в одно- и двумерных моделях. В реалистической квантовой теории поля, работающей со все более сложными лагранжианами (лагранжиан объединенной $SU(5)$-модели содержит более пятисот вершин), стала яснее роль непертурбативных эффектов. Учет этих эффектов в квазиклассическом приближении связан с существованием локализованных решений динамических уравнений типа монополей, солитонов, инстантонов; эти решения изучаются топологическими и алгебро-геометрическими средствами.

В идейном плане можно говорить о геометризации физического мышления, точнее, о ее новой волне, впервые далеко перехлестнувшей берега ОТО. Сейчас в физических журналах стали появляться таблицы гомотопических групп сфер и чеховские коцепи, а нильпотенты в структурном пучке схемы или аналитического пространства, казавшиеся почти капризом гениального Александра Гротендика в пятидесятых годах, приобрели физическую интерпретацию как носители внутренних степеней свободы фундаментальных полей в суперсимметричных моделях: статистика Ферми порождает антикоммутирующие координаты суперпространства.

Эта книга предназначена для математиков и является скромной попыткой ввести читателей в некоторый круг задач, мотивированных квантовой теорией поля. Мы, однако, остаемся на уровне классических полей и динамических уравнений, не доходя до вторичного квантования. С его проблематикой читатель может познакомиться по классической монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию калибровочных полей» (3-е изд.— М.: Наука, 1976) и по превосходной книге, специально посвященной калибровочным полям: А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, «Введение в квантовую теорию калибровочных полей» (М.: Наука, 1978).

Следующие за этим предисловием несколько страниц — это попытка помочь читателю-математику сопоставить терминологию физиков с геометрическим языком нашей книги,— стандартным жаргоном теории комплексных многообразий и когомологий пучков.

Часть материала, изложенного здесь, была предметом лекций, читанных автором на мехмате МГУ и на различных школах с участием физиков и математиков. Я глубоко благодарен многим людям, общение с которыми так или иначе повлияло на эту книгу: моему учителю И. Р. Шафаревичу; И. М. Гельфанду; Л. Д. Фаддееву; М. Ф. Атье; моим друзьям, коллегам и соавторам А. А. Бейлинсону, А. А. Белавину, С. И. Гельфанду, С. Г. Гиндикину, В. Г. Дринфельду, В. Е. Захарову, И. Ю. Кобзареву, Д. А. Лейтесу, В. И. Огиевецкому, И. Б Пенкову, А. М. Полякову, М. В. Савельеву, Я. А. Смородинскому, И. Т. Тодорову, Г. М. Хенкину, А. С. Шварцу.

Ю. И. Манин

ВВЕДЕНИЕ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Континуальный интеграл. Математическим аппаратом современной теории элементарных частиц является квантовая теория поля (КТП). В КТП основные величины выражаются через фейнмановские континуальные интегралы $\langle A\rangle = =\int A(\Psi)e^{iS(\Psi)}D(\Psi)$. Это — символическая запись, содержание которой подлежит математическому уточнению; значительная часть формализма КТП посвящена различным способам придавать смысл этой записи.

В ней Ψ означает совокупность полей теории; A — оператор, построенный из этих полей; $\langle A\rangle$ — его среднее значение; $S(\Psi)$ — функционал действия в планковских единицах, имеющий вид $\int\mathscr{L}(\Psi)d^4x$, где $\mathscr{L}(\Psi)$ — плотность лагранжиана теории, которая интегрируется по пространству-времени; $e^{iS(\Psi)}D\Psi$ — символ некоторой меры на функциональном пространстве полей Ψ, подчиненных тем или иным начальным, граничным или асимптотическим условиям. Эта мера в математическом смысле редко определена.

В большинстве реалистических моделей континуальный интеграл доопределяется и вычисляется в схеме теории возмущений. Эта схема приводит к формальному ряду, состоящему из расходящихся интегралов. Интегралы регуляризуются тем или иным способом. Ряд аппроксимируется суммой конечного числа регуляризованных членов.

2. Динамические уравнения. Уравнения Эйлера — Лагранжа $\delta\int\mathscr{L}(\Psi)d^4x=0$ называются (классическими) динамическими уравнениями или уравнениями движения. Их физическое истолкование может быть различным.

а) Если Ψ — электромагнитное или гравитационное поле, то решения уравнений движения вне источников могут истолковываться как «классические поля сил». Именно таково историческое происхождение уравнений Максвелла и Эйнштейна. В квантовой теории электромагнитного поля эти силы возникают как усредненные эффекты многофотонных состояний — средние значения соответствующих операторов квантового поля. Ожидается, что аналогичное описание классического гравитационного поля станет возможным в будущем.

б) Если Ψ — поле дираковской спинорной частицы, то решения уравнений движения (возможно, в классическом внешнем поле) могут истолковываться квантомеханически как волновые функции частицы. В квантовой теории поля они станут векторами одночастичных состояний. С некоторыми оговорками аналогично интерпретируются также определенные решения уравнений Максвелла («волновые функции фотонов»).

в) Классические решения «в мнимом времени», т. е. продолженные аналитически в подходящую область комплексифицированного пространства Минковского, можно использовать эвристически для вычисления главной части континуального интеграла методом стационарной фазы.

г) Наконец, локализованные классические решения уравнений теории поля типа солитонов и монополей могут указывать на существование специальных квазичастичных возбуждений квантового поля.

3. Лагранжиан электродинамики. Лагранжиан электромагнитного поля A_μ, взаимодействующего с полем Дирака ψ, имеет вид

$$\mathscr{L}(A_\mu, \psi) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \tag{1}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Здесь m — масса ψ, а e — заряд.

Свободное поле A_μ как классическая система есть суперпозиция бесконечного набора осцилляторов, и их стандартное квантование приводит к картине фотонов. Поля A_μ и ψ взаимодействуют через член $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$. Заряд e выступает как константа связи между фермионным током $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ и полем A_μ. Этот член взаимодействия рассматривается как малый в схеме теории возмущений квантовой электродинамики (КЭД), и по нему производится разложение в ряд. Элементы ряда по определенным комбинаторным правилам нумеруются диаграммами Фейнмана; поэтому член $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ называется также «вершиной».

Весь лагранжиан (1) в КТП можно рассматривать как сокращенную запись списка основных полей и взаимодействий, заложенных в теорию. Из квадратичной части извлекаются пропагаторы свободных полей, члены взаимодействия дают вершины диаграмм; амплитуды процессов записываются через них.

4. Фермионы-83. Как в КЭД, фундаментальные поля в основных моделях современной КТП делятся на два класса: поля материи (ψ в КЭД) и поля-переносчики взаимодействия (A_μ в КЭД). Первые подчиняются статистике Ферми — Дирака, вторые — Бозе — Эйнштейна.

Поля материи входят в лагранжиан как сечения векторных расслоений над пространством-временем, а поля-переносчики — как связности на этих расслоениях. Координаты вдоль слоя отвечают поляризации (спину) и внутренним степеням свободы таким, как цвет кварков. Эта картина упрощена, не учитывает таких членов, как духи Фаддеева — Попова (артефакт квантования), но мы будем ею пользоваться.

Поля материи соответствуют частицам, которые на данном уровне разрешения признаются бесструктурными. В парадигме, окрепшей в семидесятые годы,— это шесть лептонов (ν_e, e), (ν_μ, μ), (ν_τ, τ) и шесть кварков (u, d), (c, s), (t, b), а также их античастицы. Кроме того, электрослабая модель Вайнберга — Салама постулирует существование бозонов Хиггса, пока не наблюдавшихся, предположительно, из-за большой массы. Фермионы — лептоны и кварки — разбиты на три поколения: к первому принадлежат (ν_e, e, u, d), только и важные для понимания основных явлений окружающего нас мира. Связанные системы u, d-кварков дают нейтрон и протон, остаточные силы связывают их в ядра, электромагнитное взаимодействие ядер и электронов отвечает за возникновение атомов и молекул.

Векторные расслоения над пространством-временем Минковского, сечения которых отвечают описанным фермионам, тривиальны, а их структурная группа редуцирована. Удобно описывать их в терминах тензорной алгебры, порожденной следующими расслоениями:

$\mathcal{S}_l$ и $\mathcal{S}_r$, левые и правые двухкомпонентные спиноры Вейля, описывающие поляризацию частицы;

$SU(3)_c$-расслоение $\mathcal{E}_c$ ранга 3, отвечающее цветовым степеням свободы;

$SU(2)_w$-расслоение $\mathcal{E}_w$ ранга 2, отвечающее так называемому слабому изоспину;

$U(1)_{em}$-расслоение $\mathcal{E}_{em}$ электрического заряда.

Например, левые частицы первого поколения $(\nu_e,\ e^-)_l$, $(u,\ d)_l$, e_l^+, $\tilde{u}_l$, $\tilde{d}_l$ отвечают соответственно расслоениям

$$\underbrace{\mathcal{E}_w \otimes \mathcal{S}_l,\ \mathcal{E}_w \otimes \mathcal{E}_c \otimes \mathcal{S}_l;}_{\text{без учета заряда}}$$

$$\mathcal{E}_{\text{em}} \otimes \mathcal{S}_l, \quad \mathcal{E}_{\text{em}}^{-2/3} \otimes \overline{\mathcal{E}}_c \otimes \mathcal{S}_l, \quad \mathcal{E}_{\text{em}}^{1/3} \otimes \overline{\mathcal{E}}_c \otimes \mathcal{S}_l.$$

В схеме SU(5)-объединения, где электрослабое и сильное взаимодействия при больших энергиях выступают как разные компоненты единого взаимодействия, поле материи до нарушения SU(5)-симметрии представляется сечением прямой суммы всех этих расслоений.

На физическом языке структурная группа G расслоения материи (точнее, ее внутренних степеней свободы, в отличие от поляризационных) называется группой симметрий теории. Представление группы, отвечающее расслоению, несет в себе информацию об этих квантовых числах.

До недавнего времени ассоциированное главное G-расслоение всегда считалось тривиальным. Исследование монополей и инстантонов изменило положение дел, и числа Понтрягина и Черна соответствующих расслоений стали называться «топологическими зарядами» и признаваться квантовыми числами особого сорта.

5. Глюоны, фотоны и промежуточные бозоны. Как уже было сказано, частицы, переносящие взаимодействия, являются квантами полей связности на расслоениях внутренних степеней свободы фермионов. Ковариантную производную поля связности пишут в виде $\nabla_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, где g — соответствующая константа связи, A_μ — потенциалы поля связности. Разумеется, такая запись подразумевает выбор тривиализации (иначе ∂_μ не имеет смысла). Смена тривиализации меняет A_μ по стандартной формуле. Если вклад A_μ в лагранжиан не зависит от выбора тривиализации, то это поле называется *калибровочным*. Иными словами, лагранжиан калибровочного поля инвариантен относительно действия группы сечений главного G-расслоения.

В стандартных моделях связности A_μ действуют на следующих расслоениях (и распространяются затем на порожденную ими тензорную алгебру):

$\mathcal{E}_{\mathrm{em}}$ (фотоны);

$\mathcal{E}_w \otimes 1_B$ (промежуточные бозоны и B-поле: фотон является линейной комбинацией B-поля и одной из компонент связности на $\mathcal{E}_w$ в модели Вайнберга — Салама);

$\mathcal{E}_c$ (глюоны).

Лагранжианы моделей построены по образцу лагранжиана КЭД:

а) Каждое поле связности вносит вклад, пропорциональный квадрату модуля ее кривизны.

б) Фермионы вносят свои кинетические члены. Члены взаимодействия с полями связности получаются с использованием ковариантных производных.

в) Поле Хиггса в электрослабой модели вносит потенциальный член; его минимум интерпретируется как ненулевое вакуумное среднее, спонтанно нарушающее симметрию и придающее массы фермионам и промежуточным бозонам. Эти рассмотрения можно провести на уровне «квантования без квантования», в той мере, в какой информация о частицах и вершинах считывается прямо с лагранжиана.

Этот наивный образ действия, дополненный учетом радиационных поправок и ренормгрупповыми соображениями, оказывается иногда удивительно эффективным. Предсказания, которые делаются на основе моделей великого объединения, например SU(5)-модели, в общем, используют эти простые соображения. Эксперименты по детектированию распада протона, предсказываемые этими моделями, ставятся в последние годы. Распад протона медиируется X-бозоном, квантом SU (5)-связности или вообще G-связности, где G — группа большого объединения.

Роль калибровочной инвариантности лагранжианов в моделях с неабелевой группой симметрий выяснялась постепенно, начиная с пионерской работы Янга и Миллса [119]. С тех пор поля связности (на внешнем расслоении, в отличие, скажем, от связности Леви-Чивиты) называют также полями Янга — Миллса.

В рамках более или менее наивной теории возмущений, прототип которой доставляет квантовая электродинамика, геометрический язык едва ли дает что-нибудь новое. Но теория возмущений неэффективна уже в основной задаче квантовой хромодинамики (теории сильных взаимодействий). Эта задача состоит в объяснении невылетания кварков, точнее, того обстоятельства, что все наблюдаемые состояния «бесцветны»,— отвечают тождественному представлению группы $SU(3)_c$. Хромодинамические силы удерживают двух- и трехкварковые системы прочно связанными в нуклонных масштабах, и эта связь, каким-то образом обусловленная неабелевостью $SU(3)_c$, в отличие от абелевой электромагнитной группы $U(1)_{em}$, пока не поддается последовательному теоретическому расчету.

Для понимания невылетания цвета разрабатывается сложная статистико-геометрическая картина сильных взаимодействий. Можно выделить несколько аспектов нетривиальной геометрической природы, которые выдвигались на первый план в различных работах последних лет. А. М. Поляков и 'т Хуфт предложили учитывать туннельные процессы, меняющие топологию вакуума по цветовым степеням свободы. В простейшем приближении они описываются инстантонными решениями уравнений Янга — Миллса — полями с конечным действием в мнимом времени. Эти поля оказались исключительно красивыми математическими объектами и, как пишут физики [8], «такая красота не может пропасть даром». Но все же их роль в структуре флюктуаций глюонного поля не ясна.

Другая квазиклассическая картина — это картина глюонных струн, соединяющих кварки и образованных трубками силовых линий глюонного поля. В качестве эффективных классических полей теории здесь рассматриваются двумерные поверхности в пространстве-времени — мировые поверхности струны с действием Намбу или его вариантами.

Наконец, геометрическую природу связности как совокупности операторов параллельного переноса глубоко учитывает идеология динамики петель и контурного интеграла Вильсона, призванная, в частности, вывести струнную картину из картины Янга — Миллса в фазе невылетания.

Все это с точки зрения физики частиц пока только проекты. Но уже ясно, что вычисление квантово-полевых средних по сложному нелинейному функциональному пространству калибровочных полей должно сопровождаться углубленным изучением его структуры.

6. **Пространство-время и гравитация.** Мы не говорили до сих пор о гравитационном взаимодействии, которое со времени создания общей теории относительности является предметом геометрической по существу теории. При энергиях, доступных современным (и будущим) ускорителям, оно пренебрежимо мало в элементарных актах взаимодействия частиц. Поэтому КТП может работать в плоском пространстве-времени. С другой стороны, объединение принципов ОТО с принципами КТП оказалось исключительно трудной задачей, и квантовая теория гравитации до сих пор не создана.

Согласно Эйнштейну, классическая теория гравитации есть одновременно теория пространства-времени. Пространство-время вносит свой вклад в лагранжиан, как любое калибровочное поле; этот вклад есть скалярная кривизна связности Леви-Чивиты. По-видимому, пространственно-временные степени свободы, так же как и внутренние, являются сторонами одной геометрической картины. В космогонических сценариях описание рождения материи должно сопровождаться описанием рождения четырехмерного пространства-времени.

7. Твисторы Пенроуза. Твисторная программа Пенроуза, некоторые математические аспекты которой изложены в этой книге, принадлежит к числу нетрадиционных попыток построить квантовую теорию поля, отказавшись от пространства-времени M как от арены всех физических процессов. Вместо этого носителем полей предлагается считать пространство L световых лучей. Если M представлять себе как (расширенное) конфигурационное пространство классической системы «массивная материальная точка», то L можно интерпретировать как конфигурационное пространство классической (релятивистской) системы «частица нулевой массы». Точки x пространства-времени представлены на L своими «небесными сферами» $L(x)$, и преобразование полей с M на L и обратно является весьма нелокальным. Свойствам этого преобразования, которое мы называем преобразованием Радона — Пенроуза, посвящена значительная часть книги, в частности почти вся ее вторая глава. Пенроуз заложил также основы диаграммной техники на L, но этих вопросов мы здесь не касаемся.

Как пространство-время, так и его пространство световых геодезических в этой книге является комплексно-аналитическим. Роль комплексной аналитичности в КТП в техническом плане известна давно: теория дисперсионных соотношений и кроссинг-симметрии пользуется аналитичностью самым серьезным образом. Поскольку квантовые степени свободы комплексны по существу, возможно, что возникновение пространственно-временных степеней свободы как коллективного эффекта типа «конденсации гравитонов» проходит через промежуточные стадии, математическое описание которых уместно в рамках комплексно-аналитических методов.

Геометрия простой супергравитации также приводит к рассмотрению комплексно-аналитических миров — правого и левого. Хотя до последовательной теории, вероятно, еще далеко, многие различные соображения указывают на то, что место традиционной дифференциальной геометрии в ней займет голоморфная геометрия.

Как бы то ни было, в основном тексте книги эта точка зрения принята догматически и проработана средствами, привычными для математиков.

Глава 1

ГРАССМАНИАНЫ, СВЯЗНОСТИ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Эта глава имеет вводный характер: в ней впервые появляются несколько классических тем, которые затем в разных вариациях проходят через всю книгу.

Первая тема — реализация пространства-времени Минковского как многообразия вещественных точек большой клетки грассманиана комплексных плоскостей в пространстве твисторов. Эта реализация описана в § 3 после того, как в § 1 в удобном для дальнейшего виде приведены основные факты о грассманианах и пространствах флагов.

Вторая тема — когомологии естественных пучков на однородных пространствах и их связь с теорией представлений. В § 2 изложен характерный и самый важный для нас частный случай этой большой теории — теорема Бореля — Вейля — Ботта о когомологиях обратимых пучков на полном пространстве флагов.

Третья тема — условия интегрируемости как механизм порождения нелинейных дифференциальных уравнений и одновременно их решений. Основные понятия здесь, которые введены в § 6 (после изложения в § 4 и 5 классических определений),— коническая структура и коническая связность. Они возникли в результате аксиоматизации геометрических данных, появившихся в теории автодуальных уравнений Янга — Миллса и Эйнштейна, а также суперсимметричных уравнений Янга — Миллса.

Все три темы объединяются в § 7, где определены и исследованы обобщенные уравнения автодуальности. Их происхождение в теории поля обсуждается в следующей главе.

§ 1. Грассманианы и пространства флагов

1. Грассманиан как топологическое пространство. Пусть T — конечномерное комплексное линейное пространство. Грассманианом d-мерных подпространств в T называется множество $G(d;\ T)$ этих подпространств, снабженное следующей топологией. Пусть $H \subset T^d$ — множество таких $(t_1, \ldots$ $\ldots, t_d)$, для которых t_i линейно независимы.

Пусть φ: $H \to G(d;\ T)$ — отображение, ставящее в соответствие $(t_1, \ldots, t_d)$ линейную оболочку всех t_i. Тогда $U \subset G(d;\ T)$, по определению, открыто, если и только если $\varphi^{-1}(U)$ открыто.

Грассманиан $G(1;\ T)$ называется проективным пространством; обычно мы обозначаем его $P(T)$.

Пусть i: $T \to T'$ — линейное вложение. Тогда i-образ любого d-мерного подпространства в T является d-мерным подпространством в T', что определяет непрерывное отображение $G(i)$: $G(d;\ T) \to G(d;\ T')$. В частности, если i — изоморфизм, то $G(i)$ — изоморфизм. Таким образом, $\mathrm{GL}(T)$ действует на $G(d;\ T)$; соответствующее отображение $\mathrm{GL}(T) \times G(d;\ T) \to G(d;\ T)$ непрерывно.

Пусть T^* — двойственное к T пространство, $c = \dim T - d$. Поставим в соответствие любому подпространству в T его ортогональное дополнение в T^*. Это дает канонический изоморфизм $G(d;\ T) \xrightarrow{\sim} G(c;\ T^*)$. Ниже мы введем на $G(d;\ T)$ структуру алгебраического многообразия и предоставим читателю проверку того, что все описанные в этом пункте отображения являются морфизмами этой структуры, тем более морфизмами соответствующих комплексных и гладких структур.

2. Тавтологические расслоения и пучки. Пусть $x \in G(d;\ T)$, $\mathcal{S}(x)$ — отвечающее точке x d-мерное подпространство. Положим $S = \{(x,\ t) \mid x \in G(d;\ T),\ \ t \in \mathcal{S}(x)\} \subset G(d;\ T) \times T$, и пусть φ: $S \to G(d;\ T)$ — проекция на первый сомножитель. Пространство S называется тавтологическим векторным расслоением над $G(d;\ T)$; его слои d-мерны. Полезно одновременно с S рассматривать второе тавтологическое расслоение $\widetilde{S} = \{(x,\ t') \mid x \in G(d;\ T),\ t' \in \mathcal{S}(x)^{\perp} \subset T^*\}$ с c-мерными слоями, $c + d = \dim T$. Полезно представлять себе, что $G(d;\ T)$ и $G(c;\ T^*)$ — это две разные реализации одного и того же грассманиана с двумя равноправными тавтологическими расслоениями. Выбор одного из них в качестве основного равносилен выбору реализации.

Мы увидим в § 3, что при $c = d = 2$ расслоения S и $\widetilde{S}$ после ограничения на пространство Минковского превращаются в два расслоения двухкомпонентных спиноров.

Вместо S и $\widetilde{S}$ мы будем по большей части рассматривать пучки $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ аналитических сечений этих расслоений в аналитической структуре, которая сейчас будет описана.

3. Стандартное покрытие и координаты. Будем отмечать при необходимости размерность пространства верхним индексом. Фиксируем подпространство $S = S^c \subset T^{d+c}$ и положим

$$U(S) = \{x \in G(d;\ T) | \mathcal{S}(x) \cap S = \{0\}\}.$$

Очевидно, $U(S)$ открыто в $G(d;\ T)$ и $G(d;\ T) = \bigcup_S U(S)$. «Большие клетки» $U(S)$ в грассманиане имеют каноническую структуру аффинного пространства размерности cd. Точнее говоря, $U(S)$ есть аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством $\mathrm{Hom}(T/S,\ S) = S \otimes \otimes (T/S)^*$, причем соответствующее разностное сображение

$$U(S) \times U(S) \to \mathrm{Hom}(T/S,\ S):\ (x,\ y) \mapsto x - y$$

определяется так. Пусть $\tilde{t} \in T/S$ и $t(x)$, $t(y)$ — представители $\tilde{t}$ в $\mathcal{S}(x)$, $\mathcal{S}(y)$ соответственно; тогда $(x - y)(\tilde{t}) = = t(x) - t(y)$.

Выберем в T систему координат, $T = \mathbf{C}^{c+d}$, и покажем, что $G(d;\ T) = \bigcup U(S_I)$, где I пробегает подмножества $[1,\ \ldots,\ c+d]$ с $\mathrm{card}\, I = d$, а S_I — координатное подпространство, натянутое на базисные векторы с номерами, не принадлежащими I. В самом деле, любой элемент из T^d можно записать в виде комплексной матрицы Z размера $d \times (d+c)$, строки которой изображают векторы T в выбранной системе координат. Подмножество $H \subset T^d$, описанное в п. 1, состоит из матриц максимального ранга d. У любой такой матрицы имеется ненулевой минор. Пусть $I \subset [1,\ \ldots,\ c+d]$ — номера его столбцов. Тогда подпространство $\mathcal{S}(Z)$, порожденное строками Z, лежит в $U(S_I)$.

Более того, если $x \in U(S_I)$, то существует единственная матрица $Z_I(x)$, столбцы с номерами I которой составляют единичную матрицу, а строки порождают $\mathcal{S}(x)$. Элементы этой матрицы являются естественными координатными функциями на $U(S_I)$. В смысле введенной выше аффинной структуры это аффинно-линейные функции.

Резюмируем сказанное:

а) По системе координат $T = \mathbf{C}^{d+c}$ строится аффинное покрытие $G(d;\ T) = \bigcup U(S_I)$, $I \subset [1,\ \ldots,\ d+c]$, $\mathrm{card}\, I = c$.

б) На $U(S_I)$ имеются канонические координаты $x_I^{\alpha\beta}$, $\alpha = 1,\ \ldots,\ d$; $\beta \in [1,\ \ldots,\ d+c] \setminus I$.

в) Построим матрицу Z_I из d строк и $d+c$ столбцов, поставив $x_I^{\alpha\beta}$ на место $\alpha\beta$ и заполнив оставшиеся столбцы элементами единичной матрицы. Обозначим через B_{IJ} подматрицу Z_I, образованную столбцами с номерами J, $\mathrm{card}\, J = d$. Пусть $U_{IJ} \subset U_I$ — открытое подпространство, где

B_{IJ} обратима. Тогда $U_{IJ} = U_I \cap U_J$, и две системы координат на U_{IJ} связаны соотношением $B_{IJ}Z_J = Z_I$. Таким образом, функции перехода алгебраичны, тем более аналитичны и гладки. Грассманиан является неприводимым алгебраическим многообразием комплексной размерности dc.

В частности, при $d = 1$ матрицы Z с одной строкой ранга 1 представляют однородные координаты точки $G(1; T) = P(T)$, а матрицы Z_i, $i = 1, \ldots, c + 1$,— соответствующие неоднородные координаты (с единицей на i-м месте).

Поэтому иногда удобно называть элементы общей матрицы Z ранга d, представляющей точку $H \subset T^d$, «однородными координатами» соответствующей точки $G(d; T)$, но нужно помнить, что переход к неоднородным координатам $x_I^{\alpha\beta}$ требует деления на матрицу, а не на скаляр.

В гл. 4 мы увидим, как эта конструкция обобщается на суперграссманианы.

г) Представим $\mathrm{GL}(T)$ группой матриц $\mathrm{GL}(d + c; \mathbf{C})$, действующей на векторы-строки T. Тогда в однородных координатах $G(d; T)$ это действие превратится в умножение Z справа на $\mathrm{GL}(d + c; \mathbf{C})$.

д) Тавтологическое расслоение канонически тривиализовано над U_I: базис сечений $\mathscr{S}$ составляют строки матрицы Z_I. Если записывать его сечения строками координат в этом базисе, то функциями перехода будут матрицы B_{IJ}^{-1} из п. в).

Второе тавтологическое расслоение также канонически тривиализовано на U_I, поскольку отображение $S_I \to T/\mathscr{S}(x)$ является изоморфизмом при всех $x \in U_I$.

4. **Отображение Плюккера.** Поставим в соответствие d-мерному подпространству $S \subset T$ одномерное подпространство $\Lambda^d(S) \subset \Lambda^d(T)$. Получим отображение p: $G(d; T) \to G(1; \Lambda^d(T)) = P(\Lambda^d(T))$, которое называется отображением Плюккера. Базис (t_i) в T определяет базис (v_I) в T, $v_I = \bigwedge_{i \in I} t_i$. В соответствующих однородных координатах отображение p имеет вид

$$p(Z) = (\det_I Z),$$

где $\det_I Z$ — минор, образованный столбцами Z на местах I. Система этих миноров называется координатами Плюккера.

Можно показать, что p — замкнутое вложение, а образом p является замкнутое алгебраическое подпространство в $P(\Lambda^d(T))$, выписав полную систему тождеств (квадратичных), которым должна удовлетворять система чисел (d_I) для того, чтобы быть системой миноров одной матрицы. В § 2 мы проделаем это для случая $d=c=2$.

В гл. 4 мы построим суперграссманианы и убедимся, что для них аналога отображения Плюккера не существует (кроме вырожденных случаев).

Пучок сечений (основного) тавтологического расслоения на проективных пространствах $P=P(T)$ принято обозначать $\mathcal{O}_P(-1)$. Из определения отображения Плюккера ясно, что на $G(d;\ T)$

$$\Lambda^d \mathscr{S} = p^*\left(\mathcal{O}_{P(\Lambda^d T)}(-1)\right).$$

Аналогично, $\Lambda^c \widetilde{\mathscr{S}} = \tilde{p}^*\left(\mathcal{O}_{P(\Lambda^c T^*)}(-1)\right)$, где $\tilde{p}$ — отображение Плюккера, отвечающее второй реализации грассманиана.

Из точной последовательности $0 \to \mathscr{S} \to T \otimes \mathcal{O}_G \to \widetilde{\mathscr{S}}^* \to 0$ видно, что $\Lambda^d \mathscr{S} \simeq \Lambda^c(\widetilde{\mathscr{S}}) \otimes \Lambda^{c+d} T^*$: различие между двумя пучками несущественно.

5. Касательный пучок. Пусть M — комплексное многообразие. Через $\mathscr{T}M$ будем обозначать пучок голоморфных векторных полей на M, т. е. дифференцирований структурного пучка $\mathcal{O}_M$. Наша ближайшая цель — выразить $\mathscr{T}G(d;\ T)$ через тавтологические расслоения. Пусть $\mathscr{T}$ — пучок сечений тривиального расслоения со слоем T над $G(d;\ T) = G$. По определению имеется точная последовательность

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{T} \to \widetilde{\mathscr{S}}^* \to 0.$$

Пусть X — локальное векторное поле на G, s — локальное сечение $\mathscr{S}$, определенное в той же области. Определим Xs как сечение $\mathscr{T}$ формулой

$$X\left(\sum f_i t_i\right) = \sum (X f_i)\, t_i,$$

где $t_i \in T$, f_i — локальные функции на G. Легко проверить, что определение корректно (не зависит от произвола в выборе представления). Это действие $\mathscr{T}G$ на $\mathscr{S}$ $\mathcal{O}_G$-линейно по X, а по s удовлетворяет формуле Лейбница $X(fs) = Xf \cdot s + fXs$. Поэтому отображение $\bar{X}\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T}/\mathscr{S}$, $\bar{X}(s) = Xs \bmod \mathscr{S}$, линейно, и отображение

$$\mathscr{T}G \to \mathscr{H}om(\mathscr{S},\ \mathscr{T}/\mathscr{S})\colon\ X \mapsto \bar{X} \tag{1}$$

также $\mathcal{O}_G$-линейно.

6. Теорема. *Отображение* (1) *определяет канонический изоморфизм*

$$\mathscr{T}G = \mathscr{H}om(\mathscr{S},\ \mathscr{T}/\mathscr{S}) = \widetilde{\mathscr{S}}^* \otimes \mathscr{S}^*.$$

Доказательство. Пусть (t_α), $\alpha=1,\ \ldots,\ c+d$,— базис T, $I\subset[1,\ \ldots,\ c+d]$, $\operatorname{card} I=d$. Над U_I базис сечений $\mathcal{T}G$ состоит из $\partial/\partial x_I^{\alpha\beta}$, $\alpha=1,\ \ldots,\ d$, $\beta\notin I$. Там же базис сечений $\mathcal{S}$ состоит из строк матрицы Z_I, т. е. имеет вид

$$s^\alpha=\sum_{\beta\notin I} x_I^{\alpha\beta}t_\beta+t_{I(\alpha)},$$

где $I(\alpha)$ означает α-й по порядку элемент I. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_I^{\alpha\beta}}\, s^\gamma\equiv\delta_\alpha^\gamma t_\beta \bmod \mathcal{S}.$$

Наконец, $t_\beta \bmod \mathcal{S}$ образуют базис сечений $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, что завершает доказательство. ■

Таким образом, структурная группа касательного расслоения на грассманиане $G(d;\ T^{d+c})$ канонически редуцирована до $\mathrm{GL}(d)\times\mathrm{GL}(c)$. Поэтому вся тензорная алгебра грассманианов снабжена дополнительными структурами, отвечающими этой редукции. Отметим некоторые из них; они получат дополнительное «физическое» истолкование в § 2.

7. Нулевые направления. Касательный вектор $\tau(x)\in\mathcal{T}G(x)$ в точке x называется нулевым, если он разложим: $\tau(x)=\tilde{s}(x)\otimes s(x)$ для подходящих $\tilde{s}(x)\in\tilde{\mathcal{S}}^*(x)$, $s(x)\in\mathcal{S}(x)$. Множество нулевых направлений в $\mathcal{T}G(x)$ образует конус с базой $P(\tilde{\mathcal{S}}^*(x))\times P(\mathcal{S}(x))$. В модели Пенроуза нулевые направления окажутся комплексными направлениями световых лучей, т. е. нулевыми направлениями (конформной) метрики Минковского.

В случаях $d=1$ или $c=1$ и только в этих случаях любое направление является нулевым: соответствующие грассманианы — проективные пространства.

8. Грассмановы спиноры. Из теоремы 6 вытекает существование канонического отождествления $\Omega^1G=\mathcal{S}\otimes\tilde{\mathcal{S}}$, где $\Omega^1G=\mathcal{H}om\,(\mathcal{T}G,\ \mathcal{O}_G)$ — кокасательный пучок. Комбинируя его со сверткой, получаем два линейных отображения:

$$\sigma\colon\ \Omega^1(G)\otimes\mathcal{S}^*\to\tilde{\mathcal{S}},$$

$$\tilde{\sigma}\colon\ \Omega^1(G)\otimes\tilde{\mathcal{S}}^*\to\mathcal{S}.$$

В частности, $\Omega^1(G)$ действует на $(\mathcal{S}\oplus\tilde{\mathcal{S}})^*$, отображая этот пучок в $\mathcal{S}\oplus\tilde{\mathcal{S}}$; матрицы этого отображения в подходящих координатах — аналог классических γ-матриц, определяемых обычно через алгебру Клиффорда метрики. Поэтому расслоения $\mathcal{S}$, $\tilde{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{S}^*$, $\tilde{\mathcal{S}}^*$ мы будем называть иногда грассмановыми спинорами.

9. Разложение 2-форм. Пусть $\Omega^i G = \Lambda^i(\Omega^1 G)$. Из разложения предыдущего пункта и простой леммы тензорной алгебры получаем:

$$\Omega^2(G) = S^2(\mathscr{S}) \otimes \Lambda^2(\widetilde{\mathscr{S}}) \oplus \Lambda^2(\mathscr{S}) \otimes S^2(\widetilde{\mathscr{S}}) = \\ = \Omega^2_+(G) \oplus \Omega^2_-(G).$$

В частном случае $d = c = 2$ это разложение называется разложением на автодуальную и актиавтодуальную компоненты. Так как формы кривизны связностей являются 2-формами, мы можем писать аналоги автодуальных уравнений Янга—Миллса на любом грассмановом многообразии (лишь при $d = 1$ или $c = 1$ они тривиализируются).

10. Пучок старших форм. Как выше, имеем

$$\Omega^{cd}(G) = [\Lambda^d(\mathscr{S})]^c \otimes [\Lambda^c(\widetilde{\mathscr{S}})]^d = \\ = p^*(\mathscr{O}_P(-c)) \otimes \tilde{p}^*(\mathscr{O}_{\tilde{P}}(-d)),$$

где p, $\tilde{p}$ — два отображения Плюккера, описанные в п. 4.

11. Функтор точек грассманиана. Пусть M — аналитическое пространство, $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ — два квазикогерентных пучка на нем. Подпучок $\mathscr{F}$ называется локально прямым в $\mathscr{G}$, если у каждой точки $x \in M$ есть открытая окрестность, над которой $\mathscr{F}$ имеет прямое дополнение в $\mathscr{G}$. Локально прямой подпучок локально свободного пучка сам локально свободен, так же как и фактор по нему. На $G(d;\ T)$, например, тавтологический пучок $\mathscr{S}$ является локально прямым подпучком $\mathscr{O}_G \otimes T$.

Пусть T — конечномерное комплексное пространство. Поставим в соответствие каждому аналитическому пространству M и целому числу d следующее множество:

$G(M) =$ (множество локальных прямых подпучков ранга d пучка $\mathscr{T}_M = \mathscr{O}_M \otimes T$).

Это сопоставление очевидным образом продолжается до функтора $\mathrm{An}^0 \to \mathrm{Sets}$: морфизму $\varphi\colon N \to M$ отвечает отображение $G(\varphi)\colon G(M) \to G(N)$, которое ставит в соответствие подпучку $\mathscr{F} \subset \mathscr{T}_M$ подпучок $\varphi^*(\mathscr{F}) \subset \varphi^*(\mathscr{T}_M) = \mathscr{T}_N$.

12. Теорема. *Функтор $G(M)$ представлен грассманианом $G(d;\ T)$. Подробнее, для любого аналитического многообразия M и любого морфизма $\psi\colon M \to G(d;\ T)$ построим подпучок $\psi^*(\mathscr{S}) \subset \psi^*(\mathscr{O}_G \otimes T) = \mathscr{T}_M$. Это определяет отображения*

$$R(M)\colon \mathrm{Hom}(M,\ G(d;\ T)) \to G(M),$$

которые составляют функторный морфизм, определяющий эквивалентность функторов.

Набросок доказательства. Мы опустим все формальные проверки и укажем лишь, как строить обратное отображение $R(M)^{-1}$, т. е. как по локально прямому подпучку $\mathcal{S}_M \subset \mathcal{T}_M$ ранга d построить такой морфизм ψ: $M \to G(d;\ T)$, что $\mathcal{S}_M = \psi^*(\mathcal{S})$. С этой целью выберем в T систему координат и построим такое открытое покрытие M многообразиями Штейна $M = \cup U_i$, что на каждом U_i пучок $\mathcal{S}_M$ свободен ранга d. Выберем систему образующих из d свободных сечений s_i^α пучка $\mathcal{S}_M$ над U_i и запишем их в виде матрицы, разложив по базису T:

$$s_i^\alpha = \sum_\beta f_i^{\alpha\beta} t_\beta, \quad f_i^{\alpha\beta} \in T(U_i,\ \mathcal{O}_M).$$

В окрестности каждой точки U_i один из миноров размера $d \times d$ матрицы $\left(f_i^{\alpha\beta}\right)$ обратим — это следует из того, что $\mathcal{S}_M$ — локально прямой подпучок ранга d, и из леммы Накаямы. Измельчив покрытие, можно считать, что для каждого i выбран $I(i)$ такой, что I-й минор обратим на U_i (I имеет тот же смысл, что в п. 3). Поэтому можно, изменив базис s_i^α, выбрать $f_i^{\alpha\beta}$ так, что $\left(f_i^{\alpha\beta}\right)_{\beta \in I(i)}$ составляет единичную матрицу. Теперь определим морфизмы ψ_i: $U_i \to U_{I(i)} \subset G(d;\ T)$ условиями: $\psi_i^*\left(x_{I(i)}^{\alpha\beta}\right) = f_i^{\alpha\beta}$, $\alpha = 1, \ldots, d$, $\beta \notin I(i)$.

Можно проверить, что на пересечениях $U_i \cap U_j$ морфизмы ψ_i согласованы и потому склеиваются до глобального морфизма ψ: $M \to G(d;\ T)$. Из конструкции очевидно, что $\psi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_M$. Независимость конструкции от различных произволов проще всего установить, пользуясь тем, что если ψ существует, то он единствен, поскольку единственна локальная система образующих $\mathcal{S}_M$ с единичной матрицей на местах I. ■

13. Относительные грассманианы. Теперь мы релятивизируем определение грассманиана следующим образом.

Рассмотрим базисное аналитическое пространство N и локально свободный пучок $\mathcal{T}$ конечного ранга на нем. Поставим в соответствие любому пространству над N, т. е. морфизму φ: $M \to N$, следующее множество:

$G_N(d;\ \mathcal{T})(M,\ \varphi)$ = (множество локально прямых подпучков ранга d пучка $\mathcal{T}_M = \varphi^*(\mathcal{T})$).

Это сопоставление продолжается до функтора $\mathrm{An}_N^0 \to \mathrm{Sets}$ (здесь An_N — категория аналитических пространств над N). Если положить N = точка, T = сечения $\mathcal{T}$ над N, получится функтор, описанный в п. 11. Таким образом, можно представлять себе, что $\mathcal{T}$ есть система линейных пространств, параметризованная аналитическим пространством N, и нас интересует семейство грассманианов этих подпространств, параметризованное тем же N. Его существование гарантируется представимостью функтора $G_N(d;\ \mathcal{T})$.

14. Теорема. *Функтор $G_N(d;\ \mathcal{T})$ представим аналитическим пространством над N, которое мы будем обозначать тем же символом.*

Подробнее, существует такой морфизм π: $G_N(d;\ \mathcal{T}) \to N$ и такой локально прямой подпучок $\mathcal{S} \subset \pi^*(\mathcal{T})$ ранга d, что отображения

$$R(M,\ \varphi)\colon \operatorname{Hom}_N(M,\ G_N(d;\ \mathcal{T})) \to G_N(d;\ \mathcal{T})(M,\ \varphi),$$

ставящие в соответствие морфизму ψ: $M \to G_N(d;\ \mathcal{T})$ пространства M над N подпучок

$$\psi^*(\mathcal{S}) \subset \psi^*(\pi^*(\mathcal{T})) = \varphi^*(\mathcal{T}),$$

определяют изоморфизм соответствующих функторов. Сам пучок $\mathcal{S} \subset \pi^*(\mathcal{T})$ отвечает, таким образом, тождественному морфизму $G_N(d;\ \mathcal{T})$.

Набросок доказательства. Прежде всего, покроем N такими штейновыми открытыми подмножествами N_j, над которыми $\mathcal{T}$ свободен постоянного ранга, т. е. допускает тривиализацию: $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{N_j} \otimes T_j$. Нетрудно показать, что функтор $G_{N_j}(d;\ \mathcal{T}/N_j)$ представлен аналитическим пространством $N_j \times G(d;\ T_j)$. Далее, любой изоморфизм $(N,\ \mathcal{T}) \to (N',\ \mathcal{T}')$ определяет изоморфизм функторов $G_N(d;\ \mathcal{T}) \to G_{N'}(d;\ \mathcal{T}')$ и представляющих эти функторы пространств, если они существуют. Пользуясь этим соображением, мы можем определить отображения склейки относительных грассманианов $G_{N_i \cap N_j}(d;\ \mathcal{T} \mid N_i \cap N_j)$, рассматриваемых как открытые подпространства в i-й и j-й части большого грассманиана соответственно. Склеив их таким образом, мы получим $G_N(d;\ \mathcal{T})$ вместе со структурным морфизмом π: $G_N(d;\ \mathcal{T}) \to N$ и тавтологическим пучком $\mathcal{S} \subset \pi^*(\mathcal{T})$. Проверка всех свойств длинна, но вполне механична. ■

15. Относительная тензорная алгебра. По любому морфизму аналитических пространств π: $G \to N$ можно определить пучки относительных дифференциалов $\Omega^1 G/N$ и вертикальных векторных полей $\mathcal{T}G/N = \operatorname{Ker}(d\pi\colon \mathcal{T}G \to \pi^*(\mathcal{T}N))$.

Пусть $G = G_N(d;\ \mathcal{T})$ — относительный грассманиан, $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ — два тавтологических пучка на нем. Тогда конструкция п. 5, примененная к вертикальным векторным полям, определяет изоморфизмы

$$\mathcal{T}G/N = \tilde{\mathcal{S}}^* \otimes \mathcal{S}^*, \quad \Omega^1 G/N = \mathcal{S} \otimes \tilde{\mathcal{S}}.$$

Это следует из того, что, как было отмечено выше, локально на базе N грассманиан G есть произведение базы на обычный (абсолютный) грассманиан.

16. Функторы флагов и пространства флагов. Пусть снова N — базисное аналитическое пространство, $\mathcal{T}$ — локально свободный пучок конечного ранга на нем, $0 < d_1 < \ldots < d_k < \operatorname{rk} \mathcal{T}$ — последовательность целых чисел. Флагом длины k и типа $(d_1, \ldots, d_k)$ в $\mathcal{T}$ называется такая последовательность подпучков $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{T}$, что все вложения $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_j$ локально прямые и $\operatorname{rk} \mathcal{S}_i = d_i$.

Поставим в соответствие любому пространству $M \xrightarrow{\varphi} N$ над N следующее множество:

$$F_N(d_1, \ldots, d_k; \mathcal{T}) = (\text{множество флагов типа } (d_1, \ldots, d_k) \\ \text{в пучке } \mathcal{T}_M = \varphi^*(\mathcal{T})).$$

Это сопоставление продолжается до функтора $\mathrm{An}_N^0 \to \mathrm{Sets}$. При $N =$ точка, $\mathcal{T} =$ линейное пространство получается абсолютный функтор флагов.

Пусть $d = (d_1, \ldots, d_k)$ — некоторый тип, $d' = (d'_1, \ldots, d'_l)$ — другой тип. Если $d \supset d'$ (как множества), то имеется естественный морфизм функторов — «проекция на подфлаг меньшего типа»:

$$\pi(d, d')\colon F_N(d; \mathcal{T}) \to F_N(d'; \mathcal{T}), \quad \mathcal{S}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_k \mapsto \\ \mapsto \mathcal{S}'_1 \subset \ldots \subset \mathcal{S}'_l, \quad \mathcal{S}'_j = \mathcal{S}_{i(j)}.$$

17. Теорема. *Функтор $F_N(d_1, \ldots, d_k; \mathcal{T})$ представлен аналитическим пространством над N, которое мы будем обозначать тем же символом.*

Пространство $F_N(d_1, \ldots, d_k; \mathcal{T})$ снабжено структурным морфизмом $\pi\colon F_N \to N$ и структурным, или тавтологическим, флагом $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_k \subset \pi^*(\mathcal{T})$, который отвечает тождественному морфизму F_N. Описание изоморфизма функторов подобно сделанному в теореме 14.

Набросок доказательства. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ представляющее пространство является относительным грассманианом. Для перехода от $k \geqslant 1$ к $k + 1$ рассмотрим типы $d = (d_0, d_1, \ldots, d_k)$ и $d' = (d_1, \ldots, d_k)$. Можно считать, что представимость $F' = F_N(d'; \mathcal{T})$ доказана. Рассмотрим младший пучок $\mathcal{S}_1$ тавтологического флага на

$\mathscr{S}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{S}_k$ на F', и построим относительный грассманиан

$$G_{F'}(d_0;\ \mathscr{S}_1) \xrightarrow{\pi_0} F' \xrightarrow{\pi'} N$$

(π_0 — структурный морфизм $G_{F'}$, π' — структурный морфизм F'). Положим $\pi = \pi'\pi_0$ и рассмотрим на $G_{F'}$ флаг

$$\mathscr{S}_0 \subset \pi_0^*(\mathscr{S}_1) \subset \ldots \subset \pi_0^*(\mathscr{S}_k) \subset \pi_0^*(\pi'^*\mathscr{T}) = \pi^*(\mathscr{T}),$$

где $\mathscr{S}_0 \subset \pi_0^*(\mathscr{S}_1)$ — тавтологический пучок на $G_{F'}$.

Мы утверждаем, что $G_{F'}$ как N-пространство есть $F_N(d;\ \mathscr{T})$ с описанным выше тавтологическим флагом, а морфизм $G_{F'} \xrightarrow{\pi_0} F'$ представляет функторный морфизм $\pi(d,\ d')$.

Доказательство проводится вполне формально с использованием теоремы 14. Основной момент — конструкция по $M \xrightarrow{\varphi} N$ и флагу типа d на M соответствующего морфизма $M \to G_{F'}(d_0;\ \mathscr{S}_1)$. Сначала мы строим морфизм $M \to F'$, отвечающий укороченному флагу (он существует и единствен по индуктивному предположению), а затем используем младшую компоненту флага для подъема этого морфизма до $G_{F'}$. ■

18. Принципы обозначений. Очень многие из пространств, которые мы исследуем ниже, будут флаговыми многообразиями, причем будут допускать разные представления в виде относительных флагов над разными базисными пространствами или в виде расслоенных произведений таких многообразий. Поэтому нужна разумная система обозначений, учитывающая необходимую информацию, нужную для описания таких представлений.

Полное обозначение $F_N(d_1,\ \ldots,\ d_k;\ \mathscr{T})$ обычно будет считаться достаточно подробным; при необходимости добавляется указание π: $F_N \to N$. Базисное многообразие (конец стрелки или пространство, на котором определен пучок) указывается нижним индексом, а ранг пучков — верхним. Поэтому подробное обозначение тавтологического флага на $F = F_N(d_1,\ \ldots,\ d_k;\ \mathscr{T})$ может быть таким: $\mathscr{S}_F^{d_1} \subset \mathscr{S}_F^{d_2} \subset \ldots \ldots \subset \pi^*(\mathscr{T}^d)$. Ортогональный флаг будет отмечаться тильдой: $\widetilde{\mathscr{S}}_F^{d-d_k} \subset \widetilde{\mathscr{S}}_F^{d-d_{k-1}} \subset \ldots \subset \pi^*(\mathscr{T}^*)$.

Предположим, что нас интересует морфизм проекции на грассманиан: $\pi(d,\ d_a)$: $F_N(d_1,\ \ldots,\ d_k;\ \mathscr{T}) \to G_N(d_a;\ \mathscr{T})$, где $1 < a < k$, $d = (d_1,\ \ldots,\ d_k)$. Его можно представить в виде расслоенного произведения двух структурных морфизмов над базой $G = G_N(d_a;\ \mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} N$ следующим образом:

$$F_N(d;\ \mathcal{T}) = F_G\left(d_1, \ldots, d_{a-1};\ \mathcal{S}_G^{d_a}\right) \underset{G}{\times} F_G\left(d_{a+1} - d_a, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, d_k - d_a;\ \pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S}_G^{d_a}\right).$$

Это — обобщение приема, использованного в доказательстве из предыдущего пункта.

Позже мы обобщим эту систему обозначений на пространства изотропных флагов и на суперпространства. В заключение рассмотрим один пример.

19. «Световые лучи» на грассманианах. Пусть $2 \leqslant d \leqslant \leqslant \dim T - 2$. Рассмотрим диаграмму

$$L = F(d-1,\ d+1;\ T) \xleftarrow{\pi_1} F = F(d-1, d, d+1;\ T) \xrightarrow{\pi_2}$$
$$\to M = G(d;\ T).$$

Здесь π_1, π_2 — морфизмы проекции на подфлаг.

В обозначениях предыдущего пункта мы можем представить π_1 как структурный морфизм относительно грассманиана:

$$F = G_L\left(1;\ \mathcal{S}_L^{d+1}/\mathcal{S}_L^{d-1}\right) \to L.$$

Отсюда видно, что F есть относительная проективная прямая; в частности, слои π_1 суть проективные прямые. Тавтологический пучок на F относительно этого представления может быть выражен через тавтологический флаг на F относительно исходного представления: это будет $\mathcal{S}_F^d/\mathcal{S}_F^{d-1}$. Предоставляем читателю вычислить второй тавтологический пучок и $\mathcal{T}F/L$; мы вернемся к этому позже. Из этого вычисления можно усмотреть, что π_2-образы всех слоев π_1 имеют в любой точке нулевое направление. Ср. обсуждение в § 6 ниже.

Введенная здесь диаграмма $L \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$ является первым примером многочисленных «двойных расслоений», которые мы будем рассматривать в этой книге.

§ 2. Когомологии пространств флагов

1. Относительные проективные пространства. Пусть M — многообразие, $\mathcal{T}$ — локально свободный пучок на M ранга $m + 1 > 1$, $P = P_M(\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} M$. Напомним, что мы пишем

$\mathcal{O}(1)$ вместо $\mathcal{S}^* = \left(\mathcal{S}^1_P\right)^*$ на P, и далее, $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$, $\mathcal{E}(n) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(n)$ для любого пучка $\mathcal{E}$. Согласно теореме 1.6 имеем $\tilde{\mathcal{S}} = \Omega^1(1)$, где $\Omega^1 = \Omega^1 P/M$, откуда находим точную последовательность для второго тавтологического пучка: $0 \to \Omega^1(1) \overset{a}{\to} \pi^*(\mathcal{T}^*) \overset{b}{\to} \mathcal{O}(1) \to 0$. Достроим ядра и коядра морфизмов $S^j(b)$ и $\Lambda^j(a)$, $j \geqslant 1$, соответственно. Получим две точные последовательности:

$$0 \to \pi^*\left(S^{j-1}\mathcal{T}^*\right) \cdot \Omega^1(1) \to \pi^*\left(S^j\mathcal{T}^*\right) \xrightarrow{S^j(b)} \mathcal{O}(j) \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to \Omega^j(j) \xrightarrow{\Lambda^j(a)} \pi^*\left(\Lambda^j\mathcal{T}^*\right) \to \Omega^{j-1}(j) \to 0. \tag{2}$$

Полагая $j = m + 1$ в (2), находим отождествление

$$\Omega^m(P/M) = \pi^*\left(\Lambda^{m+1}\mathcal{T}^*\right)(-m-1). \tag{3}$$

2. Теорема. а) *$R^k\pi_*\mathcal{O}(j)$ отличен от нуля лишь при следующих значениях k и j:*

$$k = 0,\ j \geqslant 0{:}\quad \pi_*\mathcal{O}(j) = S^j(\mathcal{T}^*),$$

$$k = m,\ j \leqslant -(m+1){:}\quad R^m\pi_*\mathcal{O}(j) = S^{|j|-m-1}(\mathcal{T}) \otimes \Lambda^{m+1}(\mathcal{T}).$$

б) *$R^k\pi_*\Omega^j$ отличен от нуля лишь при $0 \leqslant k = j \leqslant m$, и тогда*

$$R^k\pi_*\Omega^k = \mathcal{O}_M.$$

в) *Если $i \neq 0$, то $R^k\pi_*\Omega^j(i) = 0$, кроме случаев $k = 0$, $i \geqslant j + 1$ или $k = m$, $i \leqslant j - m - 1$.*

Доказательство. Первое утверждение — классическая теорема Серра (в относительном варианте). Отметим, что изоморфизмы $\pi_*\mathcal{O}(j) = S^j(\mathcal{T}^*)$ суть $\pi_*\left(S^j(b)\right)$ (см. (1)), а отождествление $R^m\pi_*\mathcal{O}(j)$ вытекает из точности спаривания $\pi_*\mathcal{O}(j) \times R^m\pi_*\Omega^m(-j) \to R^m\pi_*\Omega^m = \mathcal{O}_M$ (двойственность Серра) и отождествления (3). Чтобы получить изоморфизмы б), умножим (2) на $\mathcal{O}(-j)$ и применим π_* к получавшейся точной последовательности. При $1 \leqslant j \leqslant m$ имеем $R^j\pi_*\left(\pi^*\Lambda^j(\mathcal{T}^*)(-j)\right) = 0$ в силу а), откуда следует, что граничные гомоморфизмы дают последовательные отождествления

$$\mathcal{O}_M = \pi_*\mathcal{O}_P \xrightarrow{\sim} R^1\pi_*\Omega^1 \xrightarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} R^m\pi_*\Omega^m.$$

Аналогичное рассуждение с использованием $(2)\otimes\otimes\mathcal{O}(i-j)$ устанавливает в): при $i<0$ нужно применять возрастающую индукцию по k, при $i>0$ — убывающую. ■

3. Двойственность Демазюра. Пусть теперь $\operatorname{rk}\mathcal{T}=2$, т. е. $P=P_M(\mathcal{T})\xrightarrow{\pi}M$ — относительная проективная прямая. Положим $P^*=P_M(\mathcal{T}^*)$. Специфика проективной прямой состоит в наличии канонического изоморфизма ε: $P\xrightarrow{\sim}P^*$ над M: он индуцирован изоморфизмом свертки $\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}^*\otimes\otimes\Lambda^2\mathcal{T}$ с учетом того, что $\operatorname{rk}\Lambda^2\mathcal{T}=1$ и что $P_M(\mathcal{T}\otimes\mathcal{L})=P_M(\mathcal{T})$ для любого обратимого пучка $\mathcal{L}$ и любого ранга $\mathcal{T}$ (на функторе точек отождествление сводится к тензорному умножению па $\mathcal{L}$ любого прямого подпучка).

Изоморфизм ε меняет местами пучки $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$: $\varepsilon^*(\mathcal{S}_{P^*})=\widetilde{\mathcal{S}}_P$, $\varepsilon^*(\widetilde{\mathcal{S}}_{P^*})=\mathcal{S}_P$. Он также обладает весьма хорошими функториальными свойствами: совместим с заменами базы M, функториален относительно изоморфизмов пар $(\mathcal{T}, M)\simeq(\mathcal{T}', M')$ и, наконец, «не меняется» при замене $\mathcal{T}$ на $\mathcal{T}\otimes\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ обратим.

С этим изоморфизмом связана следующая конструкция Демазюра. Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на P, $d(\mathcal{L})$ — его степень, которая однозначно определяется свойствами: $d(\mathcal{O}(a))=a$; $d(\pi^*\mathcal{K})=0$ для любого обратимого пучка $\mathcal{K}$ на базе M (мы считаем M связной); $d(\mathcal{L}_1)=d(\mathcal{L}_2)$, если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ изоморфны. Имеем: $d(\Omega^1P/M)=-2$; отображение $\pi_2^*\pi_{2*}\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ является изоморфизмом, если и только если $d(\mathcal{L})=0$.

Положим $\Omega=\Omega^1P/M$, $\Omega^{(d)}=S^d(\Omega^1P/M)$ при $d\geqslant 0$, $S^{|d|}(\mathcal{T}P/M)$ при $d<0$. Для любого обратимого пучка $\mathcal{L}$ положим $\mathcal{L}^\vee=\mathcal{L}^{-1}\otimes\Omega^{(-d)}$ $d=d(\mathcal{L})$. Очевидно, $d(\mathcal{L}^\vee)=d(\mathcal{L})$.

4. **Лемма.** *Имеется каноническое спаривание* $\pi_*(\mathcal{L})\otimes\otimes\pi_*(\mathcal{L}^\vee)\to\mathcal{O}_M$, *функциональное относительно замены базы и изоморфизмов пары* $P\to M$, *которое индуцирует двойственность между* $\pi_*(\mathcal{L})$ *и* $\pi_*(\mathcal{L}^\vee)$.

Доказательство. Положим $\mathcal{K}=\pi_*(\mathcal{L}(-d))$. Тогда канонически $\mathcal{L}=\pi^*\mathcal{K}(d)$ и $\mathcal{L}^\vee=\pi^*\mathcal{K}^{-1}(d)\otimes(\Lambda^2\mathcal{T})^d$, поскольку $\Omega^{-d}=\pi^*(\Lambda^2\mathcal{T})^d(2d)$ в силу (3). Пользуясь теоремой 2, а), находим (считая, что $d\geqslant 0$,— иначе оба пучка нулевые)

$$\pi_*(\mathcal{L})=\mathcal{K}\otimes S^d(\mathcal{T}^*),$$

$$\pi_*(\mathcal{L}^\vee)=\mathcal{K}^{-1}\otimes S^d(\mathcal{T}^*)\otimes(\Lambda^2\mathcal{T})^d.$$

Искомое спаривание является композицией умножения $\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}^{-1}\to\mathcal{O}_M$, d-й симметрической степени внешнего умножения $S^d\mathcal{T}^*\otimes S^d\mathcal{T}^*\to(\Lambda^2\mathcal{T}^*)^d$ и свертки с $(\Lambda^2\mathcal{T})^d$. ■

5. Предложение. *Рассмотрим диаграмму* $P\xrightarrow{\pi_1}M\xrightarrow{\pi_2}N$, *где* π_1 — *относительная проективная прямая,* $\pi=\pi_2\circ\pi_1$, $\mathcal{L}$ — *обратимый пучок над* P, $d=d(\mathcal{L})\geqslant-1$. *Тогда для любого* $n\geqslant 0$ *можно построить канонические изоморфизмы на* N:

$$R^n\pi_*\mathcal{L}\simeq R^{n+1}\pi_*\left(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)}\right),\quad \Omega=\Omega^1P/M.$$

Они совместимы с заменами базы над N *и изоморфизмами троек* $(P, M, \mathcal{L})$ *над* N.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $d(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)})=-d(\mathcal{L})-2$. Поэтому $R^j\pi_{1*}\mathcal{L}=0$ при $j\neq 0$, $R^j\pi_{1*}\left(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)}\right)=0$ при $j\neq 1$. Спектральная последовательность для композиции морфизмов дает поэтому

$$R^n\pi_*\mathcal{L}=R^n\pi_{2*}(\pi_{1*}\mathcal{L}),$$

$$R^{n+1}\pi_*\left(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)}\right)=R^n\pi_{2*}\left(R^1\pi_{1*}\left(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)}\right)\right).\qquad(4)$$

Теперь заметим, что спаривание Серра для π_1 имеет вид

$$R^1\pi_{1*}\left(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)}\otimes\pi_{1*}\left(\mathcal{L}^\vee\right)\to\mathcal{O}_M.$$

Сравнивая его со спариванием Демазюра, получаем канонический изоморфизм

$$R^1\pi_{1*}\left(\mathcal{L}\otimes\Omega^{(d+1)}\right)=\pi_{1*}\mathcal{L},$$

что вместе с (4) завершает доказательство. ■

6. Пространства флагов. Вернемся к общему случаю $\operatorname{rk}\mathcal{T}=m+1$. Положим $F=F_M(1, 2, \ldots, m; \mathcal{T})\xrightarrow{\pi}M$. Пусть $\varepsilon_i=(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)\in\mathbf{Z}^{m+1}$ (единица на i-м месте). Для любого $a=(a_i)\in\mathbf{Z}^{m+1}$ определим на F обратимый пучок

$$\mathcal{L}(a)=\left(\mathcal{P}_F^1\right)^{-a_1}\otimes\left(\mathcal{P}_F^2/\mathcal{P}_F^1\right)^{-a_2}\otimes\ldots$$
$$\ldots\otimes\left(\mathcal{P}_F^{m+1}/\mathcal{P}_F^m\right)^{-a_{m+1}},\quad \mathcal{P}_F^{m+1}=\pi^*(\mathcal{T}).$$

Положим $F_i=F_M(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m; \mathcal{T})$, $\pi_i\colon F\to F_i$ — стандартная проекция. Она превращает F в относительную проективную прямую: $F=P_{F_i}\left(\mathcal{P}_{F_i}^{i+1}/\mathcal{P}_{F_i}^{i+1}\right)$. Положим $\Omega_i=\Omega^1F/F_i$, $d_i(\mathcal{L})=$ (степень обратимого пучка $\mathcal{L}$ относительно π_i), $\Omega=\Omega^{\dim F/M}F/M$.

7. Предложение. а) *Классы* $l(a)$ *обратимых пучков* $\mathscr{L}(a)$ *образуют относительную группу Пикара* $\operatorname{Pic} F/M = \operatorname{Pic} F/\pi^*(\operatorname{Pic} M)$, *которая изоморфна* $\mathbf{Z}^m = \mathbf{Z}^{m+1}/\mathbf{Z}(1, \ldots, 1)$.

б) $\Omega \simeq \mathscr{L}(\beta)$, *где* $\beta = (-m, -m+2, \ldots, m)$.

в) $\Omega_i \simeq \mathscr{L}(-\alpha_i)$, *где* $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$; $d_i(\mathscr{L}(a)) = a_i - a_{i+1}$.

Доказательство. Проведем индукцию по m, воспользовавшись тем, что относительная группа Пикара относительно проективного пространства порождена пучком $\mathscr{O}(1)$. Это дает первый шаг индукции ($m = 1$). Чтобы перейти от $m-1$ к m, достаточно рассмотреть диаграмму $F \xrightarrow{\lambda} F_M(1; \mathscr{T}) = P$. Тогда $F = F_P(1, \ldots, m-1; \mathscr{T}_P/\mathscr{O}_P(-1))$, и по индуктивному предположению $\operatorname{Pic} F/P$ порожден пучками $\mathscr{L}(\varepsilon_i)$, $i \geqslant 2$; кроме того, $\operatorname{Pic} P/M$ порожден пучком $\mathscr{O}(1)$, и $\lambda^*\mathscr{O}(1) = \mathscr{L}(\varepsilon_1)$. Чтобы пучок $\mathscr{L}$ был поднят с M, необходимо, чтобы $d_i(\mathscr{L}) = 0$ для всех i. Достаточность этого условия устанавливается аналогичным индуктивным рассуждением. Далее, $d_i(\mathscr{L}(\varepsilon_i)) = 1$, $d_i(\mathscr{L}(\varepsilon_{i+1})) = -1$; $d_i(\mathscr{L}(\varepsilon_k)) = 0$ при $k = i, i+1$, поскольку $\mathscr{L}(\varepsilon_k)$ поднят с F_i. Согласно теореме 1.6

$$\Omega_i = \mathscr{S}_F^i/\mathscr{S}_F^{i-1} \otimes \left(\mathscr{S}_F^{i+1}/\mathscr{S}_F^i\right)^* = \mathscr{L}(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i),$$

поскольку на проективной прямой π_i имеем $\mathscr{S} = \mathscr{L}(\varepsilon_{i+1})$, $\tilde{\mathscr{S}}^* = \mathscr{L}(\varepsilon_i)$.

Отсюда следует, что $d_i(\mathscr{L}(a)) = 0$ при всех i лишь для a, пропорциональных $(1, \ldots, 1)$. Поскольку $\mathscr{L}(\varepsilon_i)$ — последовательные факторы пучка $\pi^*(\mathscr{T}^*)$, имеем $\mathscr{L}(1, \ldots, 1) \simeq \Lambda^{m+1}\pi^*(\mathscr{T}^*)$.

Наконец, Ω вычисляется по индукции с помощью той же диаграммы $F \xrightarrow{\lambda} P_M(1; \mathscr{T}) = P$. Действительно, $\Omega^m P/M \simeq \Lambda^{m+1}\mathscr{T}_P^*(-m-1)$ в силу (3); $\Omega^{\dim F/P} F/P \simeq \mathscr{L}(0, -(m-1), \ldots, m-1)$ по индуктивному предположению, так что

$$\Omega \simeq \Omega^{\dim F/P} F/P \otimes \lambda^*\Omega^m P/M =$$
$$= \mathscr{L}(-(m+1), -(m-1), \ldots, m-1) \otimes \Lambda^{m+1}\mathscr{T}_P^*.$$

Вспомнив, что $\Lambda^{m+1}\mathscr{T}_P^* = \mathscr{L}(1, \ldots, 1)$, получаем требуемое. ■

8. **Положительные пучки и функторы** $S^{(a)}$. Назовем пучок $\mathscr{L}(a)$ положительным, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{m+1}$, или, что то же, если $d_i(\mathscr{L}(a)) \geqslant 0$ для всех i. Положим

$$S^{(a)}(\mathscr{T}^*) = \pi^*(\mathscr{L}(a)).$$

Отображения $S^{(a)}$ продолжаются до функтора на категории локально свободных пучков на M с изоморфизмами в качестве морфизмов. Следующие свойства проверяются без труда:

а) Если $(b) = (a) + k(1, \ldots, 1)$, то $S^{(b)}(\mathcal{T}^*) = S^{(a)}(\mathcal{T}^*) \otimes \otimes (\Lambda^{m+1}\mathcal{T}^*)^k$.

б) $S^{(a,0,\ldots,0)}(\mathcal{T}^*) = S^a(\mathcal{T}^*)$.

(Воспользоваться проекцией $F \xrightarrow{\lambda} P(\mathcal{T})$ и теоремой 2.)

в) $S^{(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_r)}(\mathcal{T}^*) = \Lambda^r(\mathcal{T}^*)$.

(Индукция по r.)

Более общо, $S^{(a)}(\mathcal{T}^*)$ как пространство представления над $\mathrm{GL}(\mathcal{T}^*)$ отвечает диаграмме Юнга (a).

9. Ацикличные пучки. Назовем пучок $\mathcal{L}(a)$ ацикличным, если для некоторого i имеем $d_i(\mathcal{L}(a)) = -1$. Напомним, что на проективной прямой в точности пучки степени -1 имеют полностью тривиальные когомологии. То же мы докажем ниже для ацикличных пучков: $R^n\pi_*\mathcal{L}(a) = 0$ при всех n.

Как принято в теории представлений, введем вес $\rho = (m, m-1, \ldots, 1, 0)$; он определяется однозначно (с точностью до кратности $\sum\varepsilon_i$) условиями $d_i(\mathcal{L}(\rho)) = 1$ для всех i. Ацикличность $\mathcal{L}(a)$ поэтому равносильна тому, что $d_i(\mathcal{L}(a+\rho)) = 0$ для подходящего i.

10. Прямые образы и отражения. Предложение 5 связывает между собой прямые образы разных пучков $\mathcal{L}(a)$; мы будем применять его к диаграммам $F \xrightarrow{\pi_i} F_i \to M$. Поэтому важно вычислить, как действует операция $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \Omega_i^{(d_i(\mathcal{L})+1)}$. Пользуясь предложением 7, получаем для нее:

$$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}-1, a_i+1, a_{i+2}, \ldots).$$

Краткая запись этого действия такова: пусть $s_i\colon \mathbf{Z}^{m+1} \to \mathbf{Z}^{m+1}$ — перестановка i-й, $(i+1)$-й координат; тогда

$$\mathcal{L}(a) \mapsto \mathcal{L}(s_i(a+\rho)-\rho). \qquad (5)$$

11. Теорема. *Для любого обратимого пучка $\mathcal{L}$ на F имеется не более одного значения n, для которого $R^n\pi_*\mathcal{L} \neq 0$. Эти прямые образы вычисляются так (мы ограничиваемся пучками $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a)$, пользуясь предложением 7):*

а) Если $\mathcal{L}(a)$ ацикличен, то $R^n\pi_*\mathcal{L}(a) = 0$ для всех n.

б) Если $\mathcal{L}(a)$ положителен, то $R^n\pi_*\mathcal{L}(a) = 0$ для всех $n \geqslant 1$; по поводу $\pi_*\mathcal{L}(a)$ см. п. 7.

в) *Если $\mathscr{L}(a)$ не ацикличен и не положителен, то существует единственная нетривиальная перестановка координат w: $\mathbf{Z}^{m+1} \to \mathbf{Z}^{m+1}$ и однозначно определенный положительный пучок $\mathscr{L}(b)$ такой, что $b+\rho = w(a+\rho)$. Пусть $w = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$, где $n = l(w)$ — длина приведенного представления w в виде произведения транспозиций. Тогда*

$$R^{n(w)}\pi_*\mathscr{L}(a) \simeq \pi_*\mathscr{L}(b) = S^{(b)}(\mathscr{T}^*). \tag{6}$$

Доказательство. а) Если $\mathscr{L}(a)$ ацикличен, $d_i(\mathscr{L}(a)) = -1$, то $\mathscr{L}(s_i(a+\rho)-\rho)$ изоморфен $\mathscr{L}(a)$. Предложение 5, примененное к $F \to F_i \to M$, показывает, что номер высшего прямого образа можно сделать как угодно большим, не меняя сам этот образ. Поэтому $R^n\pi_*\mathscr{L} = 0$ для всех n.

б) Рассмотрим перестановку w: $(1, \ldots, m+1) \mapsto (m+1, \ldots, 1)$. У нее есть приведенное представление вида

$$w = s_1(s_2s_1)\ldots(s_{m-1}\ldots s_1)(s_m \ldots s_2s_1). \tag{7}$$

Действительно, читая справа налево, получаем, что эта перестановка сначала переставляет 1 на место $m+1$, меняя ее местами с соседями, затем 2 на место m и т. п. Следовательно, $l(w) = \frac{m(m+1)}{2} = N$. Но это число совпадает с размерностью F над M (последнюю легко вычислить, например, индукцией по m, как в предложении 7). Итерируя теперь изоморфизмы предложения 5 и учитывая (5), находим

$$R^n\pi_*\mathscr{L}(a) \rightleftarrows R^{n+N}\pi_*\mathscr{L}(w(a+\rho)-\rho) = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Отметим, что предложение 5 можно применять лишь при $d(\mathscr{L}) \geqslant -1$. Положительность $\mathscr{L}(a)$ обеспечивает выполнимость этого условия на каждом шагу разложения (7), потому что в любой момент применения перестановки s_i число, стоящее на i-м месте в характеристике пучка, не меньше стоящего на $(i+1)$-м месте.

в) Очевидно, $\mathscr{L}(b)$ положителен, если и только если координаты $b+\rho$ строго убывают. Поэтому w есть перестановка $a+\rho$, упорядочивающая $a+\rho$ по убыванию. Она определена не однозначно, только если среди координат $b+\rho = w(a+\rho)$ есть одинаковые соседние, но тогда $\mathscr{L}(b)$ ацикличен и, значит, $\mathscr{L}(a)$ ацикличен. В противном случае, разлагая w^{-1} в произведение перестановок соседей, упорядочивающих их по возрастанию, получаем, как выше, изоморфизм

$$\pi_*\mathscr{L}(b) \rightleftarrows R^n\pi_*\mathscr{L}(w^{-1}(b+\rho)-\rho) = R^n\pi_*\mathscr{L}(a),$$
$$n = l(w). \quad ■$$

§ 3. Квадрика Клейна и пространство Минковского

1. Твисторы. В этом параграфе T означает четырехмерное комплексное векторное пространство, которое Пенроуз называет твисторным. Положим $M = G(2;\ T)$. Как в п. 1.1, выберем базис (t_i) в T и соответствующий ему разложимый базис $(v_{ij} | 1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ в $\Lambda^2 T$.

2. Лемма. *Отображение Плюккера* p: $G(2;\ T) \to P(\Lambda^2 T) = P^5$ *отождествляет* M *с неособой квадрикой, которая в однородных координатах* y^{ij}, *двойственных базису* v_{ij}, *задается уравнением*

$$y^{12}y^{34} - y^{13}y^{24} + y^{14}y^{23} = 0.$$

Доказательство. Отображение p ставит в соответствие плоскости $\mathscr{S}(x) \subset T$ прямую $\mathbf{C}\, s_1 \wedge s_2$, где $\mathscr{S}(x) = \mathbf{C}s_1 + \mathbf{C}s_2$. Но бивектор $v \in \Lambda^2 T$ разложим, если и только если $v \wedge v = 0$. Уравнение $\left(\sum y^{ij} v_{ij}\right)^{\wedge 2} = 0$ и есть уравнение Плюккера — Клейна. Это рассуждение показывает, что p есть теоретико-множественная биекция M с квадрикой; перейдя к стандартному покрытию, нетрудно проверить, что это — изоморфизм аналитических многообразий.

Замечания. а) На $\Lambda^2 T$ имеется каноническое невырожденное симметричное скалярное произведение со значениями в одномерном комплексном пространстве $\Lambda^4 T$: это — внешнее произведение. В пространстве со скалярным произведением можно определить изотропные подпространства — те, на которых ограничение скалярного произведения тождественно равно нулю,— а также грассманианы изотропных подпространств GI и пространства изотропных флагов FI. Лемма 2 показывает, что $G(2;\ T) = GI(1;\ \Lambda^2 T)$. Мы вернемся к изотропным грассманианам ниже.

б) Поскольку $\mathrm{SL}(T)$ действует на $\Lambda^4 T$ тождественно, упомянутое скалярное произведение $\mathrm{SL}(T)$-инвариантно, что дает гомоморфизм

$$\mathrm{SL}(T) = \mathrm{SL}(4;\ \mathbf{C}) \to \mathrm{SO}(\Lambda^2 T) = \mathrm{SO}(6;\ \mathbf{C}).$$

Его ядро равно (± 1). Поскольку $\mathrm{SO}(6;\ \mathbf{C})$ имеет ту же размерность, что и $\mathrm{SL}(4;\ \mathbf{C})$, отсюда следует, что этот гомоморфизм сюръективен и является универсальным накрытием, т. е.

$$\mathrm{SL}(4;\ \mathbf{C}) = \mathrm{Spin}(6;\ \mathbf{C}).$$

Твисторы являются пространством фундаментального представления универсальной накрывающей «комплексной конформной группы» (см. ниже) так же, как спиноры являются пространством фундаментального представления группы $\mathrm{SL}(2;\ \mathbf{C})$ — универсальной накрывающей группы Лоренца. Отсюда их название (ср. семантическое сходство значений spin/twist). В обоих случаях вполне симметричную роль играет второе фундаментальное представление — на двойственном пространстве. Их суммы называются двухкомпонентными спинорами и битвисторами соответственно.

Ниже мы разберем вещественные формы этих конструкций.

3. Конформная метрика на *M*. Конформной метрикой на комплексном многообразии N мы будем называть обратимый (т. е. локально свободный ранга 1) локально прямой подпучок $\mathcal{L} \subset S^2(\Omega^1 N)$. Метрика называется невырожденной, если отвечающее ей отображение $\Omega^1 N \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{T} N$ является изоморфизмом.

Необращающееся в нуль локальное сечение пучка $\mathcal{L}$ в локальной системе координат (x^a) на N может быть записано в виде $g_{ab}dx^a dx^b$, оно определено с точностью до умножения на не обращающуюся в нуль локальную функцию. Поэтому наше определение согласуется с классическим (точнее, с его аналитической версией). Метрика на $\Lambda^2 T$, определенная в п. 2,— тоже конформная.

На $M = G(2;\ T)$ имеется каноническая конформная метрика,— подпучок $\Lambda^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}$: как в п. 1.9, существует каноническое разложение

$$S^2(\Omega^1 M) = S^2(\mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}) = \Lambda^2(\mathcal{S}) \otimes \Lambda^2(\widetilde{\mathcal{S}}) \otimes S^2(\mathcal{S}) \otimes S^2(\widetilde{\mathcal{S}}).$$

Заметим, что $\mathrm{rk}\,(\Lambda^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}) = 1$ только в случае $\mathrm{rk}\,\mathcal{S} = \mathrm{rk}\,\widetilde{\mathcal{S}} = 2$: это выделяет $G(2;\ T^4)$ среди всех грассманианов.

Более общо, конформным скалярным произведением, симметричным или антисимметричным, на локально свободном пучке ε мы будем называть локально прямой обратимый подпучок в $S^2\varepsilon^*$ или $\Lambda^2\varepsilon^*$. Поскольку пучки $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$ имеют ранг два, они снабжены тривиальными антисимметричными скалярными произведениями $\Lambda^2\mathcal{S}^*$, $\Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}^*$ соответственно, и конформную метрику g на M мы введем как тензорное произведение этих двух спариваний:

$$(s \otimes \tilde{s},\ s' \otimes \tilde{s}') = 4(s \wedge s') \otimes (\tilde{s} \wedge s'),$$

где s, s', $\tilde{s}$, $\tilde{s}'$ — локальные сечения $\mathcal{S}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ соответственно (здесь мы рассматриваем метрику как морфизм $S^2(\mathcal{T}N) \to \mathcal{L}^*$). Отсюда очевидно, что нулевые касательные векторы в смысле п. 1.7 являются нулевыми для нашей метрики; верно и обратное.

Пусть $\mathcal{L} \subset S^2(\Omega^1 N)$ — конформная метрика. Локальное сечение $g \in \Gamma(U, \mathcal{L})$, не обращающееся в нуль, называется метрикой на U, лежащей в данном конформном классе.

Поскольку $\Lambda^2\mathcal{S} = p^*(\mathcal{O}(-1))$ (см. п. 1.4) и аналогично для $\Lambda^2\tilde{\mathcal{S}}$, пучок значений метрики $\Lambda^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\tilde{\mathcal{S}}$ на M вообще не имеет глобальных сечений над M. Но он имеет сечения над любой большой клеткой в M, поскольку над ней $\mathcal{S}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ тривиализируются.

4. Световые лучи. Назовем световым лучом на M любую проективную прямую в $P(\Lambda^2 T)$, целиком лежащую на квадрике Клейна. В $\Lambda^2 T$ такой прямой отвечает плоскость, целиком состоящая из разложимых бивекторов. Пусть p, $q \in \Lambda^2 T$ — базис такой плоскости, x, $y \in M$ — соответствующие точки. Условия $p \wedge p = p \wedge q = q \wedge q = 0$ равносильны тому, что $\dim \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y) = 1$, а также тому, что $\dim(\mathcal{S}(x) + \mathcal{S}(y)) = 3$. Действительно, если $p \wedge q = 0$, p и q разложимы, то имеются представления вида $p = t_0 \wedge t_1$, $q = t_0 \wedge t_2$, $t_i \in T$; тогда $\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$ порождено t_0, а $\mathcal{S}(x) + \mathcal{S}(y)$ порождено t_0, t_1 и t_2. Более того, от выбора p и q в фиксированной плоскости из разложимых элементов, т. е. от выбора x и y на фиксированной прямой в M подпространства $\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$ и $\mathcal{S}(x) + \mathcal{S}(y)$ не зависят: в этом нетрудно убедиться, заменив p, q на пару их независимых линейных комбинаций. Таким образом, мы получили отображение

$$\{\text{световые лучи}\} \to \{(1, 3)\text{-флаги в } T\}.$$

5. Предложение. а) *Описанное отображение есть биекция пространства световых лучей L с пространством $(1, 3)$-флагов.*

б) *Естественное отображение $F(1, 3;\ T) \to G(1;\ T) \times G(3;\ T)$ определяет изоморфизм L с «квадрикой инцидент-*

ности», которая в двойственных однородных координатах z^i *и* w_i *пространств* $P(T)$ *и* $P(T^*)$ *задается уравнением* $\sum_{i=1}^{4} z^i w_i = 0$.

Доказательство. а) Если t_0 порождает 1-компоненту флага, а t_0, t_1, t_2 — его 3-компоненту, то плоскость $\mathbf{C}t_0 \wedge t_1 + \mathbf{C}t_0 \wedge t_2$ в $\Lambda^2 T$ определяет световой луч. Это отображение обратно к построенному выше.

б) Очевидно. ■

Замечание. Каждая точка x на луче l определяет одномерное подпространство в $\mathcal{S}^*(x)$ и одномерное подпространство в $\tilde{\mathcal{S}}^*(x) = T/\mathcal{S}(x)$: выберем другую точку $y \in l$ и построим аннулятор $\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$ и факторпространство $(\mathcal{S}(x) + \mathcal{S}(y))/\mathcal{S}(x)$. По вышесказанному от y эти пространства не зависят. Нетрудно проверить, что их тензорное произведение в $\tilde{\mathcal{S}}^*(x) \otimes \mathcal{S}^*(x) = \mathcal{T}M(x)$ есть касательное направление к l. Поэтому световые лучи, в соответствии со своим названием, в каждой точке имеют нулевое направление.

6. **Световые конусы.** Световым конусом $C(x)$ точки $x \in Q$ называется объединение всех световых лучей, проходящих через x. Обозначим через $L(x)$ множество этих лучей, т. е. базу $C(x)$. Согласно данному выше описанию $L(x) = P(\mathcal{S}^*(x)) \times P(\tilde{\mathcal{S}}^*(x))$.

Таким образом, «комплексный небосвод» точки $x \in M$ есть прямое произведение двух сфер Римана. Ниже мы убедимся, что его вещественная часть в вещественной точке x пространства Минковского, т. е. наш видимый небосвод, есть одна сфера Римана, за счет того, что $\mathcal{S}^*(x)$ отождествляется с пространством, комплексно сопряженным с $\tilde{\mathcal{S}}^*(x)$. Возникающие при этом две комплексные структуры на небосводе отвечают разнице между приходящей и уходящей полой светового конуса, т. е. в конечном счете выбору стрелы времени. Один небосвод мы видим, в другой посылаем сигналы.

Возвращаясь к комплексной геометрии, заметим, что $C(x)$ есть пересечение квадрики Клейна с гиперплоскостью P^4, касающейся M в точке x. Это пересечение представляет собой трехмерную квадрику с единственной особой точкой x, т. е. конус с вершиной x. Базой этого конуса является, следовательно, неособая двумерная квадрика, которая имеет две системы прямолинейных образующих, т. е. изоморфна $P^1 \times P^1$ в соответствии с вышесказанным.

7. Нулевые плоскости. Световые лучи, проходящие через точку x по всем направлениям, отвечающим одной из прямолинейных образующих базы $C(x)$, заметают комплексную проективную плоскость $P^2 \subset M$. В этой плоскости любая прямая, а не только проходящая через точку x, является световой. Значит, любое касательное направление к такой плоскости является нулевым. Легко убедиться, что все плоскости с таким свойством получаются этой конструкцией.

Нулевые плоскости образуют два непересекающихся связных семейства. Так же, как световые лучи, члены каждого из семейств можно представить в виде π_2-проекций π_1-слоев двойного расслоения на M (ср. 1.19):

$$\alpha:\quad P(T) = G(1;\, T) \xleftarrow{\pi_1} F(1,\, 2;\, T) \xrightarrow{\pi_2} G(2;\, T),$$

$$\beta:\quad P(T^*) = G(3;\, T) \xleftarrow{\pi_1} F(2,\, 3;\, T^*) \xrightarrow{\pi_2} G(2;\, T).$$

Эти двойные расслоения называются иногда автодуальной и антиавтодуальной диаграммами Пенроуза; так же называются соответствующие семейства плоскостей; иногда их называют α- и β-плоскостями. Замена T на T^* меняет местами эти ярлыки; их указание равносильно выбору одного из двух спинорных расслоений $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$ в качестве основного.

8. Лемма. *Световая плоскость в M является β-плоскостью (соответственно α-плоскостью), если и только если при ограничении на касательные направления вдоль нее обращается в нуль любое локальное сечение пучка*

$$\Omega^2_+(M) = S^2(\mathcal{S}) \otimes \Lambda^2(\widetilde{\mathcal{S}}) \qquad \left(\Omega^2_-(M) = \Lambda^2(\mathcal{S}) \otimes S^2(\widetilde{\mathcal{S}})\right)$$

Доказательство. В обозначениях п. 1.18 имеем $\Omega^1 F/P = \mathcal{S}^2_F/\mathcal{S}^1_F \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^2_F$, где $F = F(1,\, 2;\, T)$, $P = P(T)$. Действительно, F/P есть относительный грассманиан $G_P\left(1;\, (T \otimes \mathcal{O}_F)/\mathcal{S}^1_F\right)$, причем тавтологический пучок в этом представлении равен $\mathcal{S}^2_F/\mathcal{S}^1_F$, так что ортогональный к нему есть $\widetilde{\mathcal{S}}^2_F$, и остается воспользоваться теоремой 1.6. Поэтому $\Omega^2 F/P = S^2\left(\mathcal{S}^2_F/\mathcal{S}^1_F\right) \otimes \Lambda^2\left(\widetilde{\mathcal{S}}^2_F\right)$. Но $\widetilde{\mathcal{S}}^2_F = \pi_2^*\left(\mathcal{S}^2_M\right)$. Отсюда ясно, что сечения $\Omega^2_- M$ обращаются в нуль на π_2-слоях α-расслоения, и наоборот, для любого бивектора в α-плоскости найдется сечение $\Omega^2_+ M$, не равное нулю на нем. ■

9. Комплексное пространство Минковского. Комплексным пространством Минковского мы будем называть большую клетку U в $G(2;\ T)$, снабженную метрикой $g = \varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon}$, которая является тензорным произведением двух спинорных метрик $\varepsilon \in H^0(U,\ \Lambda^2\mathcal{S})$, $\tilde{\varepsilon} \in H^0(U,\ \Lambda^2\tilde{\mathcal{S}})$; сечения ε, $\tilde{\varepsilon}$ постоянны в стандартной тривиализации $\mathcal{S}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$.

Приведем дополнительные подробности.

а) Пусть большая клетка U определена подпространством $S = S^2 \subset T$ (см. 1.3). Согласно определению «на бесконечности» лежат точки вида

$$M \backslash U = \{x \in M \,|\, \dim \mathcal{S}(x) \cap S \geqslant 1\}.$$

Следовательно, для всех $x \in M\backslash U$, кроме точки ∞, отвечающей S, $\dim \mathcal{S}(x) \cap S = 1$. Это означает, что $M\backslash U = C(\infty)$ в силу 2.4: любая точка $M\backslash U$ лежит на световом луче, проходящем через ∞. В модели Пенроуза комплексное пространство Минковского компактифицировано световым конусом.

б) Согласно п. 1.3, пространство Минковского U является аффинным пространством, которое ассоциировано с векторным пространством $\mathcal{S}(\infty) \otimes (T/\mathcal{S}(\infty))^* = \mathcal{S}(\infty) \otimes \tilde{\mathcal{S}}(\infty)$. Выбор в U начала координат $0 \in U$ равносилен выбору второй плоскости $\mathcal{S}(0) \subset T$ и прямого разложения $T = \mathcal{S}(0) \oplus \oplus \mathcal{S}(\infty)$, или, по симметрии, $\tilde{\mathcal{S}}(0)$ и разложения $T^* = \tilde{\mathcal{S}}(0) \oplus \oplus \tilde{\mathcal{S}}(\infty)$. Этот выбор фиксирует тривиализации $\mathcal{S}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$ над U посредством проекции любой плоскости на $\mathcal{S}(0)$; $\tilde{\mathcal{S}}(0)$ параллельно $\mathcal{S}(\infty)$, $\tilde{\mathcal{S}}(\infty)$:

$$\mathcal{S}|U = \mathcal{S}(0) \otimes \mathcal{O}_U, \qquad \tilde{\mathcal{S}}|U = \tilde{\mathcal{S}}(0) \otimes \mathcal{O}_U.$$

в) Выберем ненулевые элементы $\varepsilon \in \Lambda^2(\mathcal{S}(0))$, $\tilde{\varepsilon} \in \in \Lambda^2(\tilde{\mathcal{S}}(0))$, которые будем считать сечениями $\Lambda^2\mathcal{S}$ и $\Lambda^2\tilde{\mathcal{S}}$, и построим по ним комплексную метрику $g = \varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon} \in \in H^0(U,\ \Omega^2 U)$.

Очевидно, подгруппа $\mathrm{SL}(T)$, сохраняющая структуру $(U,\ \varepsilon,\ \tilde{\varepsilon})$, есть $\mathrm{SL}(\mathcal{S}(0)) \times \mathrm{SL}(\mathcal{S}(\infty)) = \mathrm{SL}(2;\ \mathbf{C}) \times \mathrm{SL}(2;\ \mathbf{C})$; это комплексная группа Лоренца.

Мы можем задать ε и $\tilde{\varepsilon}$, указав в $\mathcal{S}(0)$ и $\tilde{\mathcal{S}}(0)$ системы координат, унимодулярных относительно ε и $\tilde{\varepsilon}$. Поскольку $\mathcal{S}(\infty)^* = \mathcal{S}(0)$, мы получаем двойственную систему координат в $\mathcal{S}(\infty)$ и затем в T и T^*. Запись основных объектов в этих координатах называется формализмом спинорных индексов. Опишем его подробнее.

10. Координаты в твисторных пространствах. Введем следующие **обозначения:**

	пространство	координаты
T	$\mathscr{S}(0)$	(z_0, z_1)
	$\mathscr{S}(\infty)$	$(z^{\dot 0}, z^{\dot 1})$
T^*	$\widetilde{\mathscr{S}}(0)$	$(w_{\dot 0}, w_{\dot 1})$
	$\widetilde{\mathscr{S}}(\infty)$	(w^0, w^1)

Буквенные обозначения для спинорных индексов — малые греческие: $\alpha, \beta, \ldots \in \{0, 1\}$ и $\dot\alpha, \dot\beta, \ldots \in \{\dot 0, \dot 1\}$. Как обычно бывает с индексными обозначениями, запись, скажем, z_α можно понимать двояко: если это сокращенное обозначение пары чисел (z_1, z_2), то z_α обозначает элемент пространства $\mathscr{S}(0)$; если же подразумевается одна из двух координатных функций на $\mathscr{S}(0)$, то z_α обозначает элемент пространства $\mathscr{S}(0)^*$. Сверх того, нужно помнить, что в нашем контексте элемент $\mathscr{S}(0)$ в то же время есть постоянное в данной тривиализации сечение расслоения $\mathscr{S}$ над U. При нужде обозначать непостоянные сечения, скажем, спиноры в уравнениях Дирака, мы будем позже пользоваться буквами ψ вместо z и w, как принято в физических текстах.

Мнемонические правила для запоминания игры с индексами таковы. Будем исходить из того, что координатные функции x^a на пространстве Минковского пишутся с верхними индексами; тогда координаты 1-форм $(f_a) = f_a\,dx^a$ пишутся с нижними; значит, в силу $\Omega^1 = \mathscr{S} \otimes \widetilde{\mathscr{S}}$, спинорные индексы у координат в $\mathscr{S}(0)$ и $\widetilde{\mathscr{S}}(0)$ пишутся внизу; точка у индекса заменяет тильду. При переходе к двойственным пространствам $\widetilde{\mathscr{S}}(\infty) = \mathscr{S}(0)^*$ и $\widetilde{\mathscr{S}}(0) = \mathscr{S}(\infty)^*$ индексы, естественно, поднимаются: иными словами, инвариантные скалярные произведения мы выбираем в виде:

между $\mathscr{S}(0)$ и $\widetilde{\mathscr{S}}(\infty)$: $z_0 w^0 + z_1 w^1 = z_\alpha w^\alpha$,

между $\mathscr{S}(\infty)$ и $\widetilde{\mathscr{S}}(0)$: $z^{\dot 0} w_{\dot 0} + z^{\dot 1} w_{\dot 1} = z^{\dot\alpha} w_{\dot\alpha}$,

между T и T^*: $z_\alpha w^\alpha - z^{\dot\alpha} w_{\dot\alpha}$.

Теперь запишем сечения ε и $\tilde\varepsilon$. Мы выбираем $\varepsilon = 2w^0 \wedge w^1 = w^0 \otimes w^1 - w^1 \otimes w^0 \in \Lambda^2 \mathscr{S}(0)$, $\tilde\varepsilon = 2z^{\dot 0} \wedge z^{\dot 1}$.

Поэтому в координатах:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta}\, w^{\alpha} \otimes w^{\beta}; \quad \varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1, \quad \varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0;$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\, z^{\dot\alpha} \otimes z^{\dot\beta}; \quad \varepsilon_{\dot 0\dot 1} = -\varepsilon_{\dot 1\dot 0} = 1, \quad \varepsilon_{\dot 0\dot 0} = \varepsilon_{\dot 1\dot 1} = 0.$$

Внешние умножения $\mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \Lambda^2\mathscr{S}$ (и аналогично для $\tilde{\mathscr{S}}$) можно рассматривать как (антисимметричные) спинорные метрики и использовать ε и $\tilde{\varepsilon}$ для отождествления $\mathscr{S}$ с $\mathscr{S}^*$ посредством умножения на ε, а $\tilde{\mathscr{S}}$ и $\tilde{\mathscr{S}}^*$ — умножением на $\tilde{\varepsilon}$. В наших соглашениях это приводит также к смене буквы, обозначающей координаты (z на w и наоборот); знак отождествления мы нормируем соглашением

$$z_{\alpha} \doteq \varepsilon_{\alpha\beta} w^{\beta}, \quad w_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} z^{\dot\beta}.$$

Напомним, что при поднятии индексов у $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$, т. е. при обращении этих матриц, знаки опять меняются: $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = -1$, $\varepsilon^{00} = \varepsilon^{11} = 0$:

$$w^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} z_{\beta}, \quad z^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} w_{\dot\beta}.$$

Заметим, наконец, что во многих работах, использующих твисторную технику, вместо α, $\dot\beta$ пишут A, B'. Мы выбрали вариант, который удобнее для суперсимметрии — супергравитации.

11. **Координаты в комплексном пространстве Минковского.** В соответствии с конструкцией п. 1.3 стандартные координаты на большой клетке U занимают один 2×2-блок в матрице следующего вида:

	$\mathscr{S}\,(\infty)$		$\mathscr{S}\,(0)$	
базис T:	$w_{\dot 0}$	$w_{\dot 1}$	w^0	w^1
координаты на U:	$x^{0\dot 0}$	$x^{0\dot 1}$	1	0
	$x^{1\dot 0}$	$x^{1\dot 1}$	0	1

Напомним смысл этих координат: точке $x = (x^{\alpha\dot\beta})$ отвечает подпространство в T, натянутое на строчки матрицы, т. е. на векторы $x^{\alpha\dot\beta} w_{\dot\beta} + w^{\alpha} \in T$, $\alpha = 0, 1$. Соответственно, постоянное в выбранной тривиализации $\mathscr{S}$ сечение с координатами z_α будет, как вектор из T, линейно зависеть от $x^{\alpha\dot\beta}$, имея вид $x^{\alpha\dot\beta}z_\alpha w_{\dot\beta}+z_\alpha w^\alpha$.

Тривиализуем также $\mathcal{O}_U\otimes T/\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ над U с помощью изоморфизма $\mathcal{S}(\infty)\to T/\mathcal{S}(x)$ и двойственного к нему, после чего отождествим Ω^1U с $\mathcal{S}\otimes\widetilde{\mathcal{S}}=\mathcal{O}_U\otimes(\mathcal{S}(0)\otimes\mathcal{S}(\infty)^*)$ с помощью конструкции из п. 1.5. Опишем основные структуры на U в спинорных координатах.

12. Предложение. а) $dx^{\alpha\dot\beta}=w^\alpha\otimes z^{\dot\beta}$ *при указанном отождествлении; в частности,* $dx^{\alpha\dot\beta}$ *разложимы и постоянные в описанной тривиализации.*

б) *Скалярное произведение, определяющее конформную метрику Минковского, имеет вид*

$$(dx^{\alpha\dot\beta},\ dx^{\gamma\dot\delta})=\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\dot\beta\dot\delta}(\varepsilon\otimes\widetilde{\varepsilon}),$$

т. е. коэффициенты метрики равны $g_{\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta}=\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}$.

в) ***Внешнюю*** *2-форму* $F_{\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta}\,dx^{\alpha\dot\beta}\wedge dx^{\gamma\dot\delta}$ *можно однозначно представить в виде*

$$F_{\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta}=\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}F_{\alpha\gamma}+\varepsilon_{\alpha\gamma}F_{\dot\beta\dot\delta},$$

и это представление отвечает разложению на ±-компоненты в смысле пп. 1.9 *и* 2.8.

Доказательство. а) Согласно конструкции п. 1.5 отождествление Ω^1U с $\mathcal{S}\otimes\widetilde{\mathcal{S}}$ получается следующим способом: построим дифференциал $d\colon\mathcal{S}\to(\mathcal{O}_U\otimes T)\otimes\Omega^1U$, аннулирующий постоянные сечения (элементы T), и затем его композицию с $\mathcal{O}_U\otimes T\to\mathcal{O}_U\otimes T/\mathcal{S}$. В наших обозначениях

$$d\,(x^{\alpha\dot\beta}z_\alpha w_{\dot\beta}+z_\alpha w^\alpha)\bmod\mathcal{S}\otimes\Omega^1U=dx^{\alpha\dot\beta}z_\alpha w_{\dot\beta},\ \text{откуда}\ dx^{\alpha\dot\beta}=$$
$$=w^\alpha\otimes z^{\dot\beta}.$$

б) $$(dx^{\alpha\dot\beta},\ dx^{\gamma\dot\delta})=4\,(w^\alpha\wedge w^\gamma)\otimes(z^{\dot\beta}\wedge z^{\dot\delta})=\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\dot\beta\dot\delta}(\varepsilon\otimes\widetilde{\varepsilon})$$

(четверка появилась в силу соглашений $g=\varepsilon\otimes\widetilde{\varepsilon}$ и $\varepsilon=2w^0\wedge w'$, $\widetilde{\varepsilon}=2z^{\dot 0}\wedge z^{\dot 1}$).

в) Нужно положить $F_{\alpha\gamma}=F_{\alpha\dot 0\gamma\dot 1}$, $F_{\dot\beta\dot\delta}=F_{0\dot\beta 1\dot\delta}$. ■

13. Диаграмма $L\xleftarrow{\pi_1}F\xrightarrow{\pi_2}M$ **в координатах.** Мы полагаем здесь $L=F(1,\ 3;\ T)$, $F=F(1,\ 2,\ 3;\ T)$. Следующее уравнение описывает $L \subset P(T) \times P(T^*)$ с помощью однородных координат:

$$z_\alpha w^\alpha - z^{\dot\alpha} w_{\dot\alpha} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$x^{\alpha\dot\beta} w_{\dot\beta} - w^\alpha = 0, \qquad \alpha = 0, 1; \tag{2}$$

$$x^{\alpha\dot\beta} z_\alpha - z^{\dot\beta} = 0, \qquad \dot\beta = \dot 0, \dot 1. \tag{3}$$

Уравнения (2) означают, что $\mathcal{S}(x^{\alpha\dot\beta})$ лежит в гиперплоскости T, выделенной уравнением (1) (w фиксированы); уравнения (3) означают, что $\mathcal{S}(x^{\alpha\dot\beta})$ содержит прямую в T, натянутую на вектор $(z_\alpha, z^{\dot\beta})$. Из этого геометрического рассуждения ясно, что (2) и (3) вместе неразрешимы относительно x, если не выполнено условие (1); в противном случае имеется одномерная система уравнений, отвечающая всем точкам светового луча, координаты которого задаются соотношением (1).

Наконец, заметим, что если обычные локальные координаты на многообразии суть сечения его структурного пучка, то «однородные координаты» в смысле п. 1.3 является сечениями тавтологических пучков и связанных с ними. Проиллюстрируем это на нашей диаграмме, где все существенные пучки обратимы.

На L имеем $\mathcal{S}^1_L \subset T \otimes \mathcal{O}_L$, откуда сюръективное отображение $T^* \otimes \mathcal{O}_L \to (\mathcal{S}^1_L)^*$, индуцирующее изоморфизм $T^* \simeq H^0(L, (\mathcal{S}^1_L)^*)$. Аналогично получаем $T \simeq H^0(L, (\widetilde{\mathcal{S}}^1_L)^*)$. Удобно обозначать $(\mathcal{S}^1_L)^{\otimes a} \otimes (\widetilde{\mathcal{S}}^1_L)^{\otimes b}$ через $\mathcal{O}_L(-a, -b)$. Поэтому z_α, $z^{\dot\beta}$ можно интерпретировать как сечения пучка $\mathcal{O}_L(0, 1)$, а $w_{\dot\alpha}$, w^β — как сечения пучка $\mathcal{O}_L(1, 0)$.

Канонические изоморфизмы $\pi_1^*(\mathcal{S}^1_L) = \mathcal{S}^1_F$, $\pi_1^*(\widetilde{\mathcal{S}}^1_L) = \widetilde{\mathcal{S}}^1_F$ позволяют считать z и w соответственно сечениями $(\widetilde{\mathcal{S}}^1_F)^*$ и $(\mathcal{S}^1_F)^*$ или $\mathcal{O}_F(0, 1)$ и $\mathcal{O}_F(1, 0)$.

14. Вещественное пространство Минковского. Традиционную реализацию пространства Минковского эрмитовыми 2×2-матрицами мы интерпретируем следующим образом. На большой клетке U определена антиголоморфная инволюция ρ: $U \to U$, которая в координатах $x^{\alpha\dot\beta}$ является эрмитовым сопряжением:

$$\rho^*(x^{\alpha\dot\beta}) = (x^{\alpha\dot\beta})^+ = (\overline{x}^{\alpha\dot\beta})^t$$

(черта означает комплексное сопряжение, а t — транспонирование). Множество M_0 неподвижных точек относительно этой инволюции и есть классическое вещественное пространство Минковского.

Наша точка зрения состоит скорее в том, что вещественное пространство есть комплексное с дополнительной структурой ρ, а не просто множество ρ-инвариантных точек. Поэтому мы продолжим действие ρ на все твисторные объекты.

15. **Предложение.** а) *Эрмитово сопряжение на U индуцировано антиголоморфной инволюцией на пространстве лучей L, которая в однородных координатах может быть записана следующим образом:*

$$\rho_T\colon T \times T^* \to T \times T^*,$$

$$\rho_T\left(z_\alpha,\ z^{\dot\beta};\ w^\alpha,\ w_{\dot\beta}\right) = \left(\overline{w}_{\dot\alpha},\ \overline{w}^\beta;\ \overline{z}^{\dot\alpha},\ \overline{z}_\beta\right).$$

б) *Инволюция ρ_T определяет также антиголоморфный автоморфизм структуры $(M, \mathscr{S}, \widetilde{\mathscr{S}})$, меняющий местами тавтологические расслоения, т. е. определяет отождествления*

$$\rho^*(S) = \overline{\widetilde{\mathscr{S}}},\ \rho^*(\widetilde{\mathscr{S}}) = \overline{\mathscr{S}},$$

или, поточечно, $\mathscr{S}(\rho(x)) = \overline{\widetilde{\mathscr{S}}}(x)$, $\widetilde{\mathscr{S}}(\rho(x)) = \overline{\mathscr{S}}(x)$. В частности, на вещественном пространстве Минковского тавтологические расслоения комплексно сопряжены друг другу.

Доказательство. а) Пусть $(x^{\alpha\dot\beta})$ — координаты точки $x \in M$. Тогда $\rho(x)^{\alpha\dot\beta} = \overline{x}^{\beta\dot\alpha}$. Применяя к равенствам (2), (3) комплексное сопряжение и затем переобозначая индексы $\alpha \leftrightarrow \beta$, получим, изменив порядок равенств:

$$\rho(x)^{\alpha\dot\beta}\overline{z}_\beta - \overline{z}^{\dot\alpha} = 0,$$

$$\rho(x)^{\alpha\dot\beta}\overline{w}_{\dot\alpha} - \overline{w}^\beta = 0.$$

Сравнивая (2), (3), находим, что если луч (z, w) проходит через точку x, то луч $\rho_T(z, w)$ проходит через точку $\rho(x)$. Остается заметить, что точка в M однозначно определяется множеством проходящих через нее лучей.

б) Отождествим $\mathscr{S}(x)$ с подпространством $\mathscr{S}(x) \times \{0\} \subset T \times T^*$, а $\widetilde{\mathscr{S}}(x)$ — с подпространством $\{0\} \times \widetilde{\mathscr{S}}(x) \subset T \times T^*$.

Предыдущее вычисление показывает тогда, что ρ_T индуцирует антилинейный изоморфизм $\mathcal{P}(x)$ с $\widetilde{\mathcal{P}}(\rho(x))$ и $\widetilde{\mathcal{P}}(\rho(x))$ с $\mathcal{P}(x)$. ■

16. Матрицы Паули. Поскольку на вещественной части U координаты $x^{\alpha\beta}$, вообще говоря, не вещественны, их заменяют «одноиндексными» вещественными координатами, разлагая $\left(x^{\alpha\dot\beta}\right)$ по базису Паули:

$$x^{\alpha\dot\beta} = \sigma_a^{\alpha\dot\beta} x^a;$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Более инвариантная трактовка, которая обобщается на искривленный случай, состоит в том, чтобы рассмотреть соответствующие 1-формы:

$$\sigma_a^{\alpha\dot\beta} dx^a = dx^{\alpha\dot\beta}.$$

Согласно предложению 12 общая интерпретация правой части состоит в том, что это разложимые 1-формы (в спинорном представлении), так что $\sigma_a^{\alpha\dot\beta}$ суть матрицы перехода от координатного базиса 1-форм к разложимому.

Возвращаясь к плоскому случаю, находим из предложения 12, б) стандартный вид метрики: $g_{\alpha\dot\beta\gamma\dot\delta}\, dx^{\alpha\dot\beta} dx^{\gamma\dot\delta} = \det\left(dx^{\alpha\dot\beta}\right) = (dx^0)^2 - dx^a dx^a$, $a = 1, 2, 3$.

17. Евклидова форма. Кроме вещественного пространства Минковского $M_0 \subset U$ и его компактификации (замыкания в M) вещественной частью светового конуса $C(\infty)$, в теории поля существенную роль играет «вещественное сечение» M, на котором индуцированная конформная метрика является знакоопределенной. Мы введем его с помощью антилинейных отображений на T, T^*, которые являются не инволюцией, а кватернионной структурой, т. е. имеют квадрат -1.

18. Предложение. *Введем на пространствах T, T^* кватернионную структуру, относительно которой $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(\infty)$, $\widetilde{\mathcal{P}}(0)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}(\infty)$ инвариантны, формулами $j(z_0, z_1) = (-\bar z_1, \bar z_0)$ и аналогично для z^α, $w_{\dot\alpha}$, w^α.*

Справедливы следующие утверждения.

а) *На $P(T)$, $P(T^*)$ индуцируется вещественная структура, которая не имеет вещественных точек, но имеет много-*

образие вещественных (j-инвариантных) прямых, попарно не пересекающихся, проходящих через каждую точку $P(T)$, $P(T^*)$ и составляющих слои гладкого расслоения с базой S^4.

б) *На $M = G(2;\ T) = G(2;\ T^*)$ индуцируется вещественная структура, которая в координатах $x^{\alpha\dot\beta}$ отвечает инволюции $j(x)^{\alpha\dot\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\overline{x}^{\gamma\dot\delta}$. Ее вещественные точки образуют вещественную сферу S^4 в квадрике Клейна. Семейства α- и β-плоскостей, проходящие через каждую из вещественных точек, инвариантны, и на $P(T)$, $P(T^*)$ им отвечают вещественные прямые.*

в) *Над вещественными точками M каждое из расслоений $\mathscr{S}$, $\widetilde{\mathscr{S}}$ приобретает кватернионную структуру, а индуцированная конформная метрика имеет евклидову сигнатуру.*

Доказательство. Если $(az_0,\ az_1) = (-\bar z_1,\ \bar z_0)$, то $z_1 = -\bar a\bar z_0 = -|a|^2 z_1$, откуда $z_0 = z_1 = 0$; поэтому j-неподвижных точек в $P(T)$ и $P(T^*)$ нет. Прямая, проходящая через любую точку и сопряженную к ней, вещественна; наоборот, вещественная прямая, проходящая через точку, должна проходить через сопряженную точку и потому определяется однозначно.

Легко убедиться в эквивалентности соотношений

$$\begin{pmatrix} x^{0\dot0} & x^{0\dot1} \\ x^{1\dot0} & x^{1\dot1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{\dot0} \\ w_{\dot1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \overline{x}^{1\dot1} & -\overline{x}^{1\dot0} \\ -\overline{x}^{0\dot1} & \overline{x}^{0\dot0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{w}_{\dot1} \\ \overline{w}_{\dot0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{w}^1 \\ \overline{w}^0 \end{pmatrix}$$

и аналогично для z. Это и означает, что $j(x)^{\alpha\dot\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\dot\beta\dot\delta}\overline{x}^{\gamma\dot\delta}$. Отсюда уже видно, что j индуцирует кватернионную структуру в слоях $\mathscr{S}$ и $\widetilde{\mathscr{S}}$ над вещественными точками, поскольку, в отличие от ρ_T, здесь при сопряжении $\mathscr{S}$ и $\widetilde{\mathscr{S}}$ не меняются местами.

В разложимом базисе $\Lambda^2 T$ инволюция j действует следующим образом: $j(y^{12},\ y^{13},\ y^{14},\ y^{23},\ y^{24},\ y^{34}) = (\overline{y}^{12},\ \overline{y}^{24},\ -\overline{y}^{23},\ -\overline{y}^{14},\ \overline{y}^{13},\ \overline{y}^{34})$. В таких координатах вещественные точки $G(2;\ T)$ определяются соотношениями $y^{12},\ y^{34} \in \mathbf{R}$, $y^{13} = \overline{y}^{24}$, $y^{14} = -\overline{y}^{23}$. Ограничение уравнения квадрики на эти точки (см. лемму 2) принимает вид

$$y_{12}y_{34} - |y_{13}|^2 - |y_{14}|^2 = 0.$$

Таким образом, вещественная часть M есть S^4. Пересечение $S^4 \cap U$ имеет естественную структуру R^4, а $S^4 \cap C(\infty)$ состоит из одной точки ∞.

В координатах $x^{\alpha\dot\beta}$ условие вещественности равносильно тому, что вещественны коэффициенты y^a разложения

$$x^{\alpha\dot\beta} = y^0\sigma_0^{\alpha\dot\beta} + i\sigma_a^{\alpha\dot\beta}y^a.$$

Метрика $\det(dx^{\alpha\dot\beta})$ в этих координатах равна $(dy^0)^2 + dy^a dy^a$. ■

Отметим, что при нашем выборе инволюций взаимное расположение пространства Минковского и его евклидовой формы в U таково, что они имеют общую «ось времени» (y^0 и x^0), тогда как пространственные сечения повернуты умножением на i. Физики обычно пользуются парой вещественных структур, в которых на i умножается ось времени («поворот Вика»).

19. **Псевдоэрмитова твисторная метрика.** Введенная в п. 15 инволюция ρ_T отождествляет T^* и $\overline{T}$ и потому позволяет определить на T полуторалинейное скалярное произведение $\frac{1}{2i}(t_1, \rho_T(t_2))$. В стандартных координатах для $t = (z_\alpha, z^{\dot\alpha})$ и $|t|^2 = \frac{1}{2i}(t, \rho_T(t))$ находим

$$|t|^2 = \operatorname{Im} \overline{z_\alpha} z^{\dot\alpha}.$$

Тем самым эта форма Пенроуза обладает следующими свойствами.

а) Она псевдоэрмитова сигнатуры (2, 2).

б) Точка $(t, t^*) \in T \times T^*$ отвечает световому конусу пополненного пространства Минковского, если и только если $|t|^2 = 0$ и $t^* = \rho(t)$.

Наоборот, зададим на T псевдоэрмитову форму сигнатуры (2, 2) и определим отображение ρ_T: $T \to T^*$ так, чтобы форма имела вид $\frac{1}{2i}(t_1, \rho_T(t_2))$. Это однозначно задает ρ_T. Выбор двух изотропных относительно этой формы подпространств в T в общем положении позволяет восстановить затем все остальные структуры.

§ 4. Распределения и связности

1. Определение. (*Голоморфным*) *распределением на многообразии* F называется локально прямой подпучок $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}F$. Оно называется *интегрируемым*, если $\mathcal{T}$ является подпучком алгебр Ли. ■

Ранг $\mathcal{T}$ (постоянный на связных компонентах F) называется размерностью распределения. Локальное сечение $\mathcal{T}$ называется векторным полем, касающимся распределения. Распределение можно задавать также подпучком 1-форм $\mathcal{T}^{\perp}\subset\Omega^1F$, обращающихся в нуль на $\mathcal{T}$, или дифференцированием $\partial\colon \mathcal{O}_F\to\mathcal{T}^*$, $\partial f = df(\operatorname{mod}\mathcal{T}^{\perp})$ — дифференциалом вдоль распределения. По нему восстанавливается $\mathcal{T}^{\perp}$ как ядро индуцированного отображения $\Omega^1F\to\mathcal{T}^*$.

Как правило, мы будем рассматривать распределения на многообразии, которое является тотальным пространством расслоения, возможно, с дополнительными структурами. Эти распределения, определенным образом согласованные со структурой расслоения и дополнительными структурами, будут называться связностями разных типов. Начнем с простейшего типа.

2. Определение. а) *Расслоением* $\pi\colon F\to M$ называется субмерсивный морфизм комплексных многообразий.

б) *Связностью на расслоении* (F, π) называется такое распределение $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}F$, что морфизм $d\pi$ в точной последовательности

$$0\to\mathcal{T}F/M\to\mathcal{T}F\xrightarrow{d\pi}\pi^*(\mathcal{T}M)\to 0 \tag{1}$$

индуцирует изоморфизм $\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\pi^*(\mathcal{T}M)$. ■

Дифференциал вдоль связности на расслоении отображает $\mathcal{O}_F$ в $\pi^*(\Omega^1M)$. Точнее, из (1) следует, что связность на расслоении совпадает с заданием расщепления $\mathcal{T}F$ в прямую сумму $\mathcal{T}F=\mathcal{T}F/M\oplus\pi^*(\mathcal{T}M)$ и $\Omega^1F=\Omega^1F/M\oplus\oplus\,\pi^*(\Omega^1M)$. Ему отвечает расщепление $d\colon\mathcal{O}_F\to\Omega^1F$ на два слагаемых: $d_h=\partial\colon\mathcal{O}_F\to\pi^*(\Omega^1M)$, $d_v\colon\mathcal{O}_F\to\Omega^1F/M$ — дифференциалы в горизонтальном и вертикальном направлениях. Расщепляющий (1) морфизм $h\colon\pi^*(\mathcal{T}M)\to\mathcal{T}F$ называется подъемом векторных полей.

Геометрически связность выделяет в каждой точке $x\in F$ d-мерное касательное подпространство горизонтальных направлений, которое $d\pi$ проектирует изоморфно на касательное пространство в точке $\pi(x)\in M$, $d=\dim M$. Чтобы разобраться в структуре множества связностей, рассмотрим более общую ситуацию.

3. Расширения пучков и их расщепления. Напомним элементарный формализм, позволяющий выяснить существование и описать множество связностей на расслоении.

Пусть, вообще, $\mathcal{E}\colon\ 0\to\mathcal{S}\xrightarrow{i}\mathcal{T}\xrightarrow{j}\mathcal{S}'\to 0$ — точная последовательность когерентных пучков на F. Ее расщеплением называется морфизм $h\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{T}$ такой, что $j \circ h = \mathrm{id}_{\mathcal{S}'}$; тогда $\mathcal{T} = \mathcal{S} \oplus h(\mathcal{S}')$, j — изоморфизм на $h(\mathcal{S}')$. Разность двух расщеплений $h_1 - h_2\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{T}$ отображает $\mathcal{T}$ в ядро j. Отождествив его с $\mathcal{S}$, можно считать, что $h_1 - h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Наоборот, если h_1 — расщепление и $f \in \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, то $h_1 + i \cdot f$ — расщепление. Таким образом, множество расщеплений либо пусто, либо является главным однородным пространством над группой $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Эти понятия, очевидно, локализуются: если морфизм i прямой, то имеется пучок расщеплений, который является главным однородным пространством над пучком $\mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Хорошо известно, что с помощью этого пучка строится характеристический класс $c(\mathcal{E}) \in H^1(F, \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S}))$ — препятствие к глобальному расщеплению $\mathcal{E}$. Чтобы определить его явно, рассмотрим последовательность $\mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{E})$: $0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{T}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S}') \to 0$. Она точна, когда $\mathcal{E}$ локально расщепима. Положим, $c(\mathcal{E}) = \delta(\mathrm{id}_{\mathcal{S}'})$, где $\delta\colon H^0(F, \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S}')) \to H^1(F, \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S}))$ — граничный гомоморфизм. Если на элементах открытого покрытия $F = \cup U_i$ выбраны расщепления $h_i\colon \mathcal{S}'|_{U_i} \to \mathcal{T}|_{U_i}$, то коцикл Чеха $(h_i|_{U_i \cap U_j} - h_j|_{U_i \cap U_j})$ представляет класс $c(\mathcal{E})$. Если $c(\mathcal{E}) = 0$, то $H^0(M, \mathcal{H}om(\mathcal{S}', \mathcal{S}))$ транзитивно и эффективно действует на множестве расщеплений.

4. Примеры. а) Пусть $\Delta \subset F \times F$ — диагональ, $\pi_{1,2}\colon F \times F \to F$ — две проекции, $I_\Delta \subset \mathcal{O}_{F \times F}$ — пучок уравнений диагонали. Положим $\mathcal{O}_F^{(n)} = \mathcal{O}_{F \times F}/I_\Delta^{n+1}$. Пространство $(\Delta, \mathcal{O}_F^{(n)})$ является n-й инфинитезимальной окрестностью диагонали. Можно отождествить Δ с F посредством любой из двух проекций $\pi_{1,2}$ — результат теоретико-множественно будет одним и тем же. Однако структуры $\mathcal{O}_F$-алгебры на $\mathcal{O}_F^{(n)}$ окажутся разными. Рассмотрим отображение $\partial\colon \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F^{(1)}$, $\partial f = (\pi_1^* f - \pi_2^* f) \bmod I_\Delta^2$. Можно проверить, что это дифференцирование и что оно определяет вложение Ω_F^1 в $\mathcal{O}_F^{(1)}$, отождествляющее $\Omega^1 F$ с ядром редукции $\bmod I_\Delta$: $\mathcal{O}_F^{(1)} \to \mathcal{O}_F$. Итак, мы имеем точную последовательность колец $0 \to \Omega^1 F \to \mathcal{O}_F^{(1)} \to \mathcal{O}_F \to 0$; в ней $\Omega^1 F$ — идеал с нулевым квадратом; она снабжена двумя расщеплениями, разность которых есть d.

Положим для любого когерентного пучка $\mathcal{T}$ на F: $\mathrm{Jet}^n \mathcal{T} = \pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{T}/I_\Delta^{n+1} \pi_1^* \mathcal{T})$. Это — пучок джетов n-го порядка для $\mathcal{T}$. Из предшествующего обсуждения вытекает, что имеет место точная последовательность $\mathcal{O}_F$-модулей, локально расщепимая для локально свободных $\mathcal{T}$:

$$0 \to \mathcal{T} \otimes \Omega^1 F \to \mathrm{Jet}^1 \mathcal{T} \to \mathcal{T} \to 0. \qquad (2)$$

Препятствие к ее расщеплению $c(\mathcal{T})$ лежит в $H^1(F, \mathcal{H}om(\mathcal{T}, \mathcal{T} \otimes \Omega^1 F))$. Методом Чженя — Вейля можно построить из $c(\mathcal{T})$ характеристические классы $c_i(\mathcal{T}) \in H^i(R, \Omega^i F)$ со значениями в группах когомологий пучков, от $\mathcal{T}$ уже не зависящих.

б) Пусть, в частности, $F = P(T)$. Стандартная точная последовательность (см. п. 2.1)

$$0 \to \Omega^1 F(1) \to \mathcal{O}_F \otimes T^* \to \mathcal{O}(1) \to 0$$

изоморфна последовательности (2) для $\mathcal{T} = \mathcal{O}(1)$. Класс $c_1 \in H^1(F, \Omega^1)$, как показано в § 2, является образующей этой группы (а его степени $c_1^i \in H^i(F, \Omega^i F)$ — образующими этих высших, одномерных, групп когомологий).

в) Более общо́, на любом грассманиане $F = G(d; T)$ точная последовательность

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{O}_F \otimes T \to \tilde{\mathcal{S}}^* \to 0$$

определяет класс $c(F) \in H^1(F, \mathcal{S} \otimes \tilde{\mathcal{S}}) = H^1(F, \Omega^1 F)$, нетривиальность которого нетрудно установить. Он также порождает H^1.

Возвращаясь к последовательности (1), получаем

5. Предложение. а) *Препятствием к существованию связности на расслоении* (F, π) *является класс* $c(F, \pi) \in H^1(F, \pi^* \Omega^1 M \otimes \mathcal{T} F/M)$.

б) *Если* $c(F, \pi) = 0$, *то на множестве всех связностей транзитивно и эффективно действует группа* $H^0(F, \pi^* \Omega^1 M \otimes \mathcal{T} F/M) = H^0(M, \Omega^1 M \otimes \pi_* (\mathcal{T} F/M))$. ■

6. Пучок коэффициентов связности на расслоении. Мы будем называть так пучок $\Omega^1 M \otimes \pi_* (\mathcal{T} F/M)$. Вычисления ниже покажут, что локальные сечения этого пучка в координатах описываются символами типа символов Кристоффеля для важных классов расслоений F.

Выделим теперь два класса связностей на расслоении, совместимых с дополнительной структурой.

7. Связность на G-расслоении. Пусть комплексная группа Ли G действует на π: $F \to M$ над M, т. е. задано отображение $F \times G \to F$, $(f, g) \mapsto fg$, с обычными свойствами, причем $\pi(fg) = \pi(f)$ для всех f, g. Связность $\mathcal{T} \subset \mathcal{T} F$ совместима с этой структурой, если подпучок $\mathcal{T}$ G-инвариантен.

8. Связность на векторном расслоении. Пусть π: $F \to M$ — векторное расслоение. Эту структуру можно задать так: пусть $\mathcal{F}$ — локально-свободный пучок голоморфных сечений π. Тогда сечения $\mathcal{F}^*$ являются функциями на F. В каждой точке F есть локальная система координат, часть которой поднята с M, а другая часть состоит из базиса сечений $\mathcal{F}^*$, линейно независимых в этой точке. Рассмотрим на F пучок $S(\mathcal{F}^*)$ функций, полиномиальных вдоль слоев π. Любая связность на F однозначно определяется своим действием на $S(\mathcal{F}^*)$. Она называется связностью, согласованной со структурой векторного расслоения, если любое локальное векторное поле связности X переводит $S^i(\mathcal{F}^*)$ в $S^i(\mathcal{F}^*)$ для всех $i \geqslant 0$.

Чаще всего мы будем заменять рассмотрение векторных расслоений F изучением их пучка сечений $\mathcal{F}$.

9. Связность на расслоении вдоль распределения на базе. Пусть $\pi\colon F \to M$ — расслоение, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}M$ — распределение на базе, $\mathcal{T}_0F = (d\pi)^{-1}(\pi^*\mathcal{T})$. Связностью на F вдоль $\mathcal{T}$ называется расщепление точной последовательности

$$0 \to \mathcal{T}F/M \to \mathcal{T}_0F \xrightarrow{d\pi} \mathcal{T} \to 0.$$

Как выше, можно ввести пучок коэффициентов такой связности $\pi_*(\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{T}F/M)$, а также определить согласованность с дополнительной структурой, например структурой векторного расслоения на F.

Проиллюстрируем все введенные понятия несколькими простыми вычислениями. Пусть $F \to M$ — векторное расслоение, $\mathcal{F}$ — пучок, двойственный к пучку голоморфных сечений F, $P_M(\mathcal{F})$ — соответствующее относительное проективное пространство. Предположим также, что на M выбраны локальные координаты (x^a) и в области их действия тривиализация пучка $\mathcal{F}$ задана базисом его сечения (w^α). Тривиализация любого расслоения, т. е. выбор изоморфизма $F \simeq F_0 \times M$, совместимого с π, автоматически определяет на нем связность $\mathcal{T} = \mathcal{T}F/F_0$ (векторные поля, вертикальные относительно проекции на слой). Используя эту связность в качестве начала отсчета, можно задавать все остальные связности указанием сечения пучка коэффициентов. Пучок коэффициентов в нашем случае также будет тривиализован выбором (x^a) и (w^a); соответствующее разложение и приводит к обобщенным символам Кристоффеля.

10. Предложение. *Следующие структуры эквивалентны:*

а) *Связность на векторном расслоении $F \to M$, совместимая со структурой векторного расслоения.*

б) *Ковариантный дифференциал* $\nabla\colon \mathcal{F}\to\mathcal{F}\otimes\Omega^1 M$, *т. е.* $\mathbb{C}$*-линейный морфизм пучков с формулой Лейбница* $\nabla(af)=a\nabla f+f\otimes da$, *где* a *— локальная функция,* f *— локальное сечение* $\mathcal{F}$.

в) *Расщепление точной последовательности* $0\to\mathcal{F}\otimes\Omega^1M\to J^1\mathcal{F}\to\mathcal{F}\to 0$ (см. п. 4, а)).

г) *Пара, состоящая из связности* $\mathcal{T}$ *на расслоении* $P_M(\mathcal{F}^*)\to M$ *и связности на векторном расслоении* $F\to P_M(\mathcal{F}^*)$ *вдоль распределения* $\mathcal{T}$.

Локально связность на $\pi\colon F\to M$ *можно описать символом Кристоффеля* $(\Gamma^\alpha_{\beta a})\in H^0(M,\mathcal{F}^*\otimes\mathcal{F}\otimes\Omega^1)$, *а индуцированная связность на* $P_M(\mathcal{F}^*)$ *зависит лишь от его бесследной части* ${}^0\Gamma^\alpha_{\beta a}=\Gamma^\alpha_{\beta a}-\frac{1}{d}\delta^\alpha_\beta\Gamma^\gamma_{\gamma a}$, $d=\operatorname{rk}\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $\partial_a=\partial/\partial x^a$, $X=h(\partial_a)$ — подъем ∂_a на F в силу некоторой фиксированной связности h на $F\to M$. Согласно п. 8 X_a переводят $S^\cdot(\mathcal{F})\subset\mathcal{O}_F$ в себя; в частности, $X_a w^\alpha=\Gamma^\alpha_{\beta a}w^\beta$ для подходящих функций $\Gamma^\alpha_{\beta a}(x)$ на M. Наоборот, задание значений $X_a w^\alpha$ этими формулами вместе с условиями $X_a\pi^*(x^b)=\delta^b_a$ однозначно определяет поднятые векторные поля X_a, порождающие распределения на F, которые совместимы со структурой векторного расслоения.

Положим далее $\nabla w^\alpha=X_a w^\alpha\otimes dx^a=\Gamma^\alpha_{\beta a}w^\beta\otimes dx^a$ и продолжим ∇ на локальные сечения $\mathcal{F}$ с помощью формулы Лейбница. Дифференциал ∇ однозначно характеризуется подъемом h с помощью следующего свойства: $X\lrcorner\nabla w=h(X)w$ для любого локального поля X на M и локального сечения w пучка $\mathcal{F}$. Вместе с локальными формулами в координатах это доказывает эквивалентность структур а) и б).

Так как ∇ является дифференциальным оператором первого порядка, известное универсальное свойство $\mathrm{Jet}^1\mathcal{F}$ позволяет разложить ∇ в композицию $\mathcal{F}\xrightarrow{j}\mathrm{Jet}^1\mathcal{F}\xrightarrow{k}\mathcal{F}\otimes\Omega^1M$, где j — универсальный оператор, спуск с помощью π_2 морфизма $\pi_1^*\mathcal{F}\to\pi_1^*\mathcal{F}/I_\Delta^2\pi_1^*\mathcal{F}$ в обозначениях п. 4, а), а k зависит от ∇. Морфизм k и осуществляет расщепление точной последовательности п. в). Это рассуждение обратимо. Множество расщеплений $\mathrm{Jet}^1\mathcal{F}$, если оно не пусто, является главным однородным пространством над сечениями $\mathcal{F}^*\otimes\mathcal{F}\otimes\Omega^1M$. Локально они описываются теми же коэффициентами $\Gamma^\alpha_{\beta a}$. Характеристический класс пучка $\mathcal{F}$ в смысле п. 4, а),— препятствие к существованию ∇.

Переходя к связностям на $P = P_M(\mathcal{F}^*) \xrightarrow{\lambda} M$, вычислим сначала соответствующий пучок коэффициентов. Связность расщепляет последовательность

$$0 \to \mathcal{T}P/M \to \mathcal{T}P \to \lambda^*(\mathcal{T}M) \to 0.$$

Из точной последовательности $0 \to \mathcal{O}_P \to \lambda^*(\mathcal{F}^*)(1) \to \to \mathcal{T}P/M \to 0$ вытекает, что $\lambda_*(\mathcal{T}P/M) \simeq (F^* \otimes F)/\mathcal{O}_M = (\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{F})_0$ (см. § 2). Отсюда следует, что пучок коэффициентов связности на $(P_M(\mathcal{F}^*), \lambda)$ есть $(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{F})_0 \otimes \Omega^1 M$, т. е. в координатах, пучок бесследных символов Кристоффеля. Чтобы сравнить связности на P со связностями на F, заметим следующее. Функции w^α/w^γ вместе с x^a (точнее, $\lambda^*(x^a)$) образуют систему координат на P там, где $w^\gamma \neq 0$. Построим по связности $X_a w^\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta a} w^\beta$ на F связность на P, задав действие на этих координатах поднятых векторных полей естественными формулами:

$$X_a(w^\alpha/w^\gamma) = (X_a w^\alpha)/w^\gamma - (w^\alpha X_a w^\gamma)/(w^\gamma)^2 =$$
$$= \Gamma^\alpha_{\beta a} w^\beta/w^\gamma - w^\alpha \Gamma^\gamma_{\beta a} w^\beta/(w^\gamma)^2. \qquad (3)$$

Корректность проверяется без труда. Правая часть (3) обращается в нуль для чисто диагонального тензора $\Gamma^\alpha_{\beta a} = \delta^\alpha_\beta \Gamma_a$. Можно убедиться, что это вычисление равносильно предыдущему описанию вертикальных векторных полей $\lambda_*(\mathcal{T}P/M) = (\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{F})_0$.

(Отметим, что в гладкой категории векторные поля на проективном пространстве вовсе не обязаны быть линейными, здесь проявляется жесткость голоморфной категории.)

Информация, утраченная при переходе от F к P, восстанавливается следующим способом. Пучок $\mathcal{O}(1) \subset \pi^*(\mathcal{F})$ порожден своими глобальными сечениями, которые можно отождествить с w^α. После этого формулы $X_a w^\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta a} w^\beta$ интерпретируются, с учетом (3), как связность на $\mathcal{O}(1)$ вдоль распределения на P, отвечающего (3). ■

11. Связности и тензорная алгебра. Локально свободные пучки с ковариантным дифференциалом, или связностью, $(\mathcal{F}, \nabla)$ образуют категорию, в которой есть тензорные произведения и внутренний функтор $\mathcal{H}om$. Формулы для ∇ на пучках, полученных применением операций тензорной алгебры из нескольких данных пучков, однозначно определяются следующими двумя условиями: а) формула

Лейбница выполнена для тензорного умножения; б) стандартные морфизмы тензорной алгебры (из которых важнейший — свертка: $\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{O}_M$) совместимы с ∇. Отсюда получаем

$$(\mathcal{E}_1, \nabla_1) \otimes (\mathcal{E}_2, \nabla_2) = (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \nabla_1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_2),$$

$$\mathcal{H}om\,((\mathcal{E}_1, \nabla_1), (\mathcal{E}_2, \nabla_2)) = (\mathcal{H}om\,(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \nabla_1^* \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_2)$$

или, подробнее,

$$(\nabla f)(e_1) = \nabla_2(f(e_1)) - (f \otimes 1)(\nabla_1 e_1).$$

Поскольку $\mathrm{Hom}\,((\mathcal{E}_1, \nabla_1), (\mathcal{E}_2, \nabla_2))$ есть множество морфизмов $f\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$, перестановочных с ∇_1, ∇_2, его можно отождествлять с множеством горизонтальных (аннулируемых ∇) сечений $\mathcal{H}om\,(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

§ 5. Интегрируемость и кривизна

1. **Форма Фробениуса.** Формой Фробениуса распределения $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}F$ называется отображение $\Phi\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}F/\mathcal{T}$, $\Phi(X, Y) = [X, Y] \bmod \mathcal{T}$. Очевидно, $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$. Кроме того, из формулы Лейбница следует билинейность Φ:

$$[aX, Y] = aXY - Y(aX) =$$
$$= aXY - aYX - (Ya)X \equiv a[X, Y] \bmod \mathcal{T}.$$

Поэтому Φ можно рассматривать как отображение $\Phi\colon \Lambda^2\mathcal{T} \to \mathcal{T}F/\mathcal{T}$ или как сечение пучка: $\Phi \in H^0(F, \Lambda^2\mathcal{T}^* \otimes \otimes \mathcal{T}F/\mathcal{T})$. В случае связности $\mathcal{T}$ на $\pi\colon F \to M$ мы будем называть $\pi_*(\Lambda^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{T}F/\mathcal{T})$ пучком кривизн, а $\pi_*(\Phi)$ — кривизной $\mathcal{T}$.

Интегрируемость $\mathcal{T}$ равносильна обращению Φ в нуль. Напомним классические результаты об интегрируемом случае. Первый из них — голоморфная теорема Фробениуса.

2. Теорема. *Следующие условия равносильны:*

а) *Распределение $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}F$ интегрируемо.*

б) *У каждой точки $x \in F$ существует окрестность с локальной системой координат (x^a), $a = 1, \ldots, m$, такая, что $\mathcal{T}$ свободно порожден в этой окрестности частью координатных векторных полей $(\partial/\partial x^a$, $a = 1, \ldots, d = \mathrm{rk}\,\mathcal{T})$.* ■

Полицилиндр $\{(x^a) \mid |x^i| < c_i\}$ со свойством б) назовем окрестностью Фробениуса (для $\mathcal{T}$).

3. Слоения. Пусть $\mathcal{T}$ — интегрируемое распределение, $U \subset F$ — окрестность Фробениуса. Тогда тривиальное расслоение π: $U \to V$, где $V = \{(x^{d+1}, \ldots, x^m) \mid |x^i| < c_i\}$, обладает тем свойством, что $\mathcal{T}|_U = \mathcal{T}U/V$. Его слоями являются полицилиндры $x^i = \mathrm{const}^i$, $d+1 \leqslant i \leqslant m$. Глобально $\mathcal{T}$ определяет слоение на F, т. е. разбиение F на иммерсированные d-мерные многообразия (слои), которые в каждой точке касаются $\mathcal{T}$.

Более формально, снабдим F тонкой топологией, у которой фундаментальной системой окрестностей являются слои $\pi^{-1}(v)$, $v \in V$, в окрестностях Фробениуса U. Очевидно, что сама окрестность U_{fin} в этой топологии есть прямое произведение слоя на базу V, рассмотренную в дискретной топологии: U «рассыпается на слои». Аналогично, F_{fin} имеет каноническую структуру комплексного многообразия (заданы окрестности и координатные функции); тождественное отображение $F_{\mathrm{fin}} \to F$ является иммерсией. Связные компоненты F_{fin} и называются слоями.

Обозначим через L пространство слоев с топологией, индуцированной отображением факторизации π: $F \to L$. Нетрудно проверить, что π — открытое отображение. Будем говорить, что $\mathcal{T}$ интегрируемо до расслоения, если L можно снабдить такой структурой комплексного многообразия, что π будет голоморфным. Следующий простой критерий этого бывает полезен.

4. Лемма. *$\mathcal{T}$ интегрируемо до расслоения, если и только если выполнены следующие условия:*

а) *L является топологическим многообразием.*

б) *Любое замкнутое $(m-d)$-мерное подмногообразие в открытом подмножестве $U \subset F$, трансверсальное к слоям π, проектируется в L локально гомеоморфно.*

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна. Для доказательства достаточности покроем L образами полицилиндров Фробениуса, описанных в п. 3, и объявим локальными аналитическими функциями координаты $x_U^{d+1}, \ldots, x_U^m$ на них. Проверим, что переход от одной системы координат к другой в окрестности точки $l \in L$ является аналитическим обратимым отображением. Действительно, пусть $x, y \in \pi^{-1}(l)$, $U \ni x$, $U' \ni y$ — малые полицилиндры вокруг точек x, y, и пусть $x^{d+1}, \ldots, x^m$ и $y^{d+1}, \ldots, y^m$ — соответствующие координаты. Чтобы выразить y^a через x^a, соединим U и U' цепочкой окрестностей точек $z_1, \ldots, z_k \in \in \pi^{-1}(l)$: $z_i \in U_i$, $U \cap U_1 \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, $\ldots$, $U_k \cap U' \neq \varnothing$, в которых трансверсальные к $\mathcal{T}$ многообразия проектируются в L гомеоморфно. Это дает последовательность биголоморфных замен, связывающих y^a с x^a. ■

Пусть теперь $\mathcal{T}$ — интегрируемое распределение в F, π: $F \to M$ — расслоение, причем $\operatorname{rk}\mathcal{T} = \dim M$ и слои π трансверсальны к $\mathcal{T}$, т. е. $\mathcal{T}M = \mathcal{T}F/M \oplus \mathcal{T}$. Следующая теорема Эресмана легко получается из теоремы Фробениуса.

5. Теорема. *В описанной ситуации предположим, что все слои компактны. Тогда проекция с помощью* π *любого слоя слоения* $\mathcal{T}$ *на* M *является неразветвленным накрытием* M. ■

Эта теорема применима к интегрируемым связностям на расслоении π: $F \to M$. Слои соответствующего слоения — это «многозначные горизонтальные сечения F».

6. **Комплекс де Рама слоения.** Пусть $\mathcal{T}$ — интегрируемое распределение на многообразии F (возможно, $\mathcal{T} = \mathcal{T}F$). Если оно интегрируемо до расслоения с базой L, то $\mathcal{T} = \mathcal{T}F/L$. Мы будем иногда пользоваться этим обозначением в общем случае, помня, что пространство листов L не обязано быть комплексным многообразием. Как показывают объяснения в п. 3, однако, в случаях, когда с F и $\mathcal{T}$ можно работать локально, это обозначение подсказывает удобные ассоциации.

Положим $\Omega^1 F/L = \mathcal{T}^*$, $\Omega^i F/L = \Lambda^i \Omega^1 F/L$, $\Omega^\cdot F/L = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \Omega^i F/L$. Следующий результат устанавливается точно так же, как в классическом случае $\mathcal{T} = \mathcal{T}F$.

7. Предложение. *Существует единственный дифференциальный оператор первого порядка* $d = d_{F/L}$: $\Omega^\cdot F/L \to \Omega^\cdot F/L$, *увеличивающий степень формы на единицу, со следующими свойствами*:

а) $d_{F/L}$: $\mathcal{O}_F \to \Omega^1 F/L$ *есть композиция* $\mathcal{O}_F \xrightarrow{d} \Omega^1 F \to \mathcal{T}^*$;

б) $d(\omega^p \wedge \omega^q) = d\omega^p \wedge \omega^q + (-1)^p \omega^p \wedge d\omega^q$, $\omega^p \in \Omega^p F/L$;

в) $d^2 = 0$.

Обозначим через $\rho^{-1}(\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_F$ *пучок голоморфных функций, постоянных вдоль слоев слоения. Тогда комплекс де Рама*

$$0 \to \rho^{-1}(\mathcal{O}_L) \to \mathcal{O}_F \xrightarrow{d_{F/L}} \Omega^1 F/L \to \ldots$$

точен, т. е. $(\Omega^\cdot F/L,\ d)$ *является резольвентой* $\rho^{-1}(\mathcal{O}_L)$. ■

Напомним, что единственность $d_{F/L}$ сразу следует из свойств а) и б), существование устанавливается с помощью явной формулы

$$d_{F/L}\omega^p(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i[\omega^p(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots \\ \ldots, X_{p+1})] + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega^p([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots \\ \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{p+1}).$$

Интегрируемость распределения используется именно в этом месте: во вторую сумму входит коммутатор. Точность устанавливается явной конструкцией гомотопии (лемма Пуанкаре).

8. Ковариантный дифференциал вдоль слоения. Пусть теперь на многообразии F со слоением $\mathcal{T}F/L$ задан локально свободный пучок $\mathcal{E}$. Назовем ковариантным дифференциалом, или связностью, на $\mathcal{E}$ вдоль слоения **C**-линейное отображение $\nabla = \nabla_{F/L}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1 F/L$ с формулой Лейбница $\nabla(ae) = a\nabla e + e \otimes d_{F/L}a$, где e — локальное сечение $\mathcal{E}$, a — локальная функция. Мы предоставляем читателю сформулировать и доказать относительный (над L) аналог предложения 4.10. В частности, задание $\nabla_{F/L}$ равносильно заданию связности вдоль распределения $\mathcal{T}F/L$ на векторном расслоении E, ассоциированном с $\mathcal{E}$.

Введем теперь последовательность де Рама связности $\nabla_{F/L}$ на $\mathcal{E}$.

9. Теорема. а) *Существует единственный дифференциальный оператор первого порядка* $\nabla = \nabla_{F/L}\colon \mathcal{E} \otimes \Omega^\cdot F/L \to \mathcal{E} \otimes \Omega^\cdot F/L$ *со следующими свойствами:*

$\nabla_{F/L} = \nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1 F/L$ — *ковариантный дифференциал;*

$\nabla(e \otimes \omega^p) = \nabla_{F/L}e \wedge \omega^p + e \otimes d_{F/L}\omega^p.$

б) *Существует единственный элемент* $\Phi = \Phi(\nabla_{F/L}) \in H^0(F, \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^2 F/L)$ *такой, что* $\nabla^2\colon \mathcal{E} \otimes \Omega^\cdot F/L \to \mathcal{E} \otimes \Omega^\cdot F/L$ *есть* $\mathcal{O}_F$*-линейный оператор умножения на* Φ, *т. е. композиции* $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *и внешнего умножения на* $\Omega^\cdot F/L$.

в) *Связность на* E *интегрируема, если и только если* $\Phi = 0$. *Тогда комплекс де Рама*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes \Omega^1 F \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes \Omega^2 F/L \to \ldots$$

является резольвентой пучка $\nabla_{F/L}$*-горизонтальных сечений*

$\mathscr{E}$ *(который по аналогии с* $\rho^{-1}(\mathcal{O}_L)$ *мы будем обозначать* $\rho^{-1}(\mathscr{E}_L)$*).*

г) *Пусть* $\widetilde{\nabla}\colon \mathrm{End}\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{\cdot}F/L\to\mathrm{End}\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{\cdot}F/L$ — *ковариантный дифференциал, построенный по той связности на* $\mathrm{End}\,\mathscr{E}$, *которая индуцирована связностью* $\nabla_{F/L}$ *в соответствии с* п. 4.10. *Тогда* $\widetilde{\nabla}(\Phi(\nabla))=0$ *(тождество Бьянки).*

Доказательство. Единственность следует из тождеств а) индукцией по степени p. Существование устанавливается проверкой того, что свойствами а) обладает следующий оператор ($\omega^p_{\mathscr{E}}$ — сечение $\mathscr{E}\otimes\Omega^pF/L$):

$$(\nabla\omega^p_{\mathscr{E}})(X_1,\ldots,X_{p+1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i\lrcorner\nabla\left(\omega^p_{\mathscr{E}}(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{p+1})\right)+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega^p_{\mathscr{E}}([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{p+1}).$$

В действительности ∇ является дифференцированием $\mathscr{E}\otimes\Omega^{\cdot}F/L$, как правого $\Omega^{\cdot}F/L$-модуля: $\nabla(\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge\omega^q)=\nabla\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge\omega^q+(-1)^p\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge d_{F/L}\omega^q$; мы опускаем прямолинейную проверку.

Применим эту формулу еще раз:

$$\nabla^2(\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge\omega^q)=\nabla^2\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge\omega^q+(-1)^{p+1}\nabla\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge\omega^q+$$
$$+(-1)^p\nabla\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge d_{F/L}\omega^q=\nabla^2\omega^p_{\mathscr{E}}\wedge\omega^q.$$

Таким образом, отображение ∇^2 уже $\Omega^{\cdot}F/L$-линейно; в частности, его компонента $\mathscr{E}\to\mathscr{E}\otimes\Omega^2\,\mathcal{O}_F$-линейна. Это и есть кривизна $\Phi(\nabla_{F/L})$.

В самом деле, вычислим ее значение на паре векторных полей из $\mathscr{T}F/L$ и сечение e пучка $\mathscr{E}$. Будем писать ∇_X вместо $X\lrcorner\nabla$, тогда

$$\nabla e(X)=\nabla_Xe,$$
$$(\nabla^2e)(X_1,X_2)=\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}e-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}e-\nabla_{[X_1,X_2]}e=$$
$$=\left([\nabla_{X_1},\nabla_{X_2}]-\nabla_{[X_1,X_2]}\right)e.$$

С другой стороны, согласно доказательству леммы 8, правая часть этого равенства представляет собой действие оператора $[h(X_1),\ h(X_2)]-h[X_1,\ X_2]$ на координатных функциях e двойственного расслоения $E^* \xrightarrow{\pi} F$, где h: $\pi^*(\mathcal{T}F/L) \to \mathcal{T}E^*$ — подъем векторных полей, отвечающий $\nabla_{F/L}$. Так как этот оператор $\mathcal{O}_F$-билинейно зависит от X_1, X_2, он по существу представляет форму Фробениуса и обращается в нуль одновременно с ней. (Если настаивать на желании работать с расслоением E, а не E^*, можно начинать с ковариантного дифференциала ∇^* на $\mathcal{E}^*$. При стандартном отождествлении $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}$ с $\mathrm{End}\,\mathcal{E}^*$ кривизны ∇ и ∇^* совпадают).

Если $\Phi = 0$, то в силу теоремы Фробениуса $\mathcal{E}$ локально по F обладает базисом сечений, горизонтальных вдоль листов слоения $\mathcal{T}F/L$. Поэтому комплекс де Рама $(\mathcal{E}, \nabla_{F/L})$ локально изоморфен прямой сумме обычных комплексов де Рама слоения, откуда следует, что он точен во всех членах, кроме первого. Ядро $\nabla_{F/L}$ на $\mathcal{E}$ есть $\rho^{-1}(\mathcal{E}_L)$ по определению.

Осталось доказать тождество Бьянки. Для любого сечения $\omega_{\varepsilon}^{p} = \omega$ имеем $\nabla(\nabla^2\omega) = \nabla^2(\nabla\omega)$, т. е. $\nabla(\omega \wedge \Phi) = (\nabla\omega) \wedge \Phi$ (где подразумевается свертка $\mathcal{E} \times \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ и внешнее умножение). С другой стороны, по общей формуле Лейбница в тензорной алгебре $\mathcal{E}$ имеем $\Delta(\omega \wedge \Phi) = (\nabla\omega) \wedge \Phi + (-1)^p \omega \wedge \widetilde{\nabla}\Phi$, откуда $\widetilde{\nabla}\Phi = 0$. ■

§ 6. Конические структуры и конические связности

1. **Определение.** Пусть M — комплексное многообразие, $\mathcal{T}M$ — его касательный пучок, $d \geqslant 0$ — целое число. *d-конической структурой* на многообразии M называется такое гладкое замкнутое подмногообразие $F \subset G_M(d;\ \mathcal{T}M)$, что проекция π: $F \to M$ является субмерсией. ■

Иными словами, F определяет в каждой точке $x \in M$ систему d-мерных (комплексных) касательных направлений в $\mathcal{T}M(x)$, отвечающих точкам $\pi^{-1}(x) \subset G(d;\ \mathcal{T}M(x))$; при $d = 1$ они заметают конус. Эта система образует замкнутое гладкое аналитическое (и, значит, алгебраическое) подпространство в грассманиане. Сверх того, набор этих многообразий $\{\pi^{-1}(x)\}$ анлитически зависит от x. Коническую структуру $F = G(d;\ \mathcal{T}M(x))$ назовем полной — в ней отмечены все d-мерные направления.

2. **Примеры.** а) Пусть $M = G(d;\ T)$, $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ — тавтологические пучки на M, $F = P_M(\widetilde{S}^*) \underset{M}{\times} P_M(\widetilde{S})$; напомним, что $P_M(\mathcal{S}^*) = G_M(1;\ \mathcal{S}^*)$ (читателю полезно в этом

месте освежить в памяти систему обозначений, описанную в п. 1.18). Одна точка F — это пара одномерных подпространств в $\widetilde{\mathscr{S}}^*(x)$, $\mathscr{S}^*(x)$, $x \in M$. Их тензорное произведение есть одномерное подпространство в $\widetilde{\mathscr{S}}^*(x) \otimes \mathscr{S}^*(x) = \mathscr{T}M(x)$ в силу теоремы 1.6. Соответствующее отображение $F \to P_M(\mathscr{T}M)$, называемое морфизмом Веронезе, есть замкнутое вложение. Это определяет 1-коническую структуру нулевых направлений на грассманиане M.

б) Пусть снова $M = G(d;\ T)$, $d = \mathrm{rk}\,\mathscr{S}$, $c = \mathrm{rk}\,\widetilde{\mathscr{S}}$, $F = P_M(\mathscr{S}^*) \xrightarrow{\pi} M$, $\widetilde{F} = P_M(\widetilde{\mathscr{S}}^*) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} M$. Поставим в соответствие точке F, т. е. лучу в $\mathscr{S}^*(x)$, его тензорное произведение на $\widetilde{\mathscr{S}}^*(x)$ — это c-мерное подпространство в $\mathscr{T}M(x)$. Так определяется c-структура $i\colon F \to G_M(c;\ \mathscr{T}M) = G$ и d-структура $\widetilde{i}\colon \widetilde{F} \to G_M(d;\ \mathscr{T}M) = \widetilde{G}$.

Формальное задание морфизмов i, $\widetilde{i}$ равносильно указанию пучков $i^*\left(\mathscr{S}^c_G\right)$. $\widetilde{i}^*\left(\mathscr{S}^d_{\widetilde{G}}\right)$. Вспомпив определения, нетрудно убедиться, что

$$i^*\left(\mathscr{S}^c_G\right) = \pi^*\left(\widetilde{\mathscr{S}}^*\right) \otimes \mathscr{O}_F(-1),$$

$$\widetilde{i}^*\left(\mathscr{S}^d_{\widetilde{G}}\right) = \widetilde{\pi}^*\left(\mathscr{S}^*\right) \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{F}}(-1).$$

При $c = d = 2$ эти 2-конические структуры определяют на квадрике Клейна системы касательных направлений к α- и β-плоскостям: см. 3.7.

в) Пусть на многообразии M задана конформная метрика $\mathscr{L} \subset S^2(\Omega^1 M)$ (см. п. 3.3). Если она невырождена, то в каждой точке $x \in M$ она определяет невырожденный квадратичный конус нулевых направлений, т. е. 1-коническую структуру F, которая над M является относительной квадрикой. Верно и обратное: по 1-конической структуре $F \subset P(\mathscr{T}M)$, которая является невырожденной квадрикой коразмерности единица, однозначно восстанавливается конформная метрика.

Именно, пусть $P = P_M(\mathscr{T}M) \xrightarrow{\pi} M$, $J_F(2) \subset \mathscr{O}_F(2)$ — идеал уравнений F в P; положим $\mathscr{L} = \pi_*(J_F(2)) \to \pi_*(\mathscr{O}_F(2)) = S^2(\mathscr{T}^*M)$. Пучок $\mathscr{L}$ обратим, поскольку все квадратичные уравнения квадрики пропорциональны. Далее, $\mathscr{O}_P(2)/J_F(2) = \mathscr{O}_F(2)$ и $\pi_*\mathscr{O}_F(2)$ локально свободен, поскольку размерность его слоев не меняется. Наконец, $R^1\pi_{2*}J_F(2) = 0$. Следовательно, $\mathscr{L} \subset S^2(\mathscr{T}^*M)$ — локально прямой подпучок. Это и есть конформная метрика, отвечающая данной системе световых направлений.

3. Определение. Пусть F есть d-коническая структура на многообразии F.

а) Распределение c-мерных касательных плоскостей в F *касается конической структуры*, если для каждой точки $x \in F$ проекция в $\mathcal{T}M(x)$ касательной плоскости в этой точке лежит в d-мерном подпространстве, отвечающем x.

б) *Конической связностью* на F называется распределение d-мерных касательных плоскостей, касающееся этой конической структуры.

в) Коническая связность на F называется *интегрируемой*, если она интегрируема как распределение.

г) Листы слоения, отвечающие интегрируемой конической связности, а также их образы в M называются *геодезическими многообразиями* этой связности. ■

4. Примеры. а) Любая связность на 1-конической структуре интегрируема.

Проективной связностью на M называется связность на полной 1-конической структуре $P_M(\mathcal{T}M)$. Ее геодезические кривые в M проходят через каждую точку по каждому направлению. Для общей 1-конической структуры геодезические проходят через каждую точку, но лишь по содержащимся в этой структуре направлениям. На проективном пространстве имеется каноническая проективная связность, геодезическими которой являются все прямые. На гладкой квадрике имеется каноническая 1-коническая связность, отвечающая структуре асимптотических направлений в каждой точке. Ее геодезическими являются прямые объемлющего проективного пространства, лежащие на квадрике.

б) В примерах 2, а) и б), конические структуры заданы также вместе с геодезическими многообразиями интегрируемой связности. Именно, если $M = G(d;\ T)$, то в примере 2, а) $F = F(d-1,\ d,\ d+1;\ T)$ и слои проекции π: $F(d-1,\ d,\ d+1;\ T) \to F(d-1,\ d+1;\ T)$ суть геодезические многообразия. В примере 2, б) $F = F(d-1,\ d;\ T)$ или $F(d,\ d+1;\ T)$, и геодезическими являются слои проекций на $G(d \pm 1;\ T)$.

в) Это — примеры «плоских» интегрируемых связностей, отвечающих двойным расслоениям $L \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$, которые являются компактными однородными многообразиями. Рассмотрим вообще такую диаграмму многообразий со следующими свойствами: слои π_2 компактны; π_1 и π_2 — субмерсии гладких многообразий; в любой точке $x \in F$ касательные направления к слоям π_1 и π_2 имеют нулевое пересечение.

Тогда F превращается в коническую структуру на M посредством распределения

$$F \ni y \mapsto \mathrm{Ker}\,(d\pi_1\colon \mathcal{T}F(y) \to \mathcal{T}L(\pi_1(y))) \in G(d;\, \mathcal{T}M(\pi_2(x))),$$
$$d = \dim F - \dim L.$$

Распределение $\mathrm{Ker}\, d\pi_1$ является интегрируемой конической связностью, а слои π_1 — ее геодезическими многообразиями.

Ниже мы научимся задавать также конические связности их коэффициентами типа символов Кристоффеля. Условия интегрируемости будут нелинейными дифференциальными уравнениями на эти коэффициенты, среди которых содержатся автодуальные уравнения Эйнштейна, а также различные «связи» в супергравитации.

5. Коническая связность как расщепление. Словесное определение 3 можно переформулировать следующим образом. Пусть $\mathcal{S}$ — тавтологический пучок на $G_M(d;\, \mathcal{T}M)$, $\mathcal{S}_F$ — его ограничение на F, $\mathcal{S}_F \subset \pi^*(\mathcal{T}M)$, $\pi\colon F \to M$. Положим $\mathcal{T}_c F = (d\pi)^{-1}\mathcal{S}_F$ и рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{T}F/M \to \mathcal{T}_c F \xrightarrow{d\pi} \mathcal{S}_F \to 0. \qquad (1)_F$$

Коническая связность на F — это ее расщепление. Поэтому пучком коэффициентов конической связности на F естественно назвать пучок $\pi_*(\mathcal{S}_F^* \otimes \mathcal{T}F/M)$.

Мы сравним три множества связностей и их пучки коэффициентов:

а) Связности на расслоении $\pi\colon G_M(d;\, \mathcal{T}M) \to M$.

б) Конические связности на полной конической структуре $G = G_M(d;\, \mathcal{T}M)$.

в) Конические связности на общей конической структуре $F \subset G_M(d;\, \mathcal{T}M)$.

Заметим прежде всего, что имеется естественное отображение а) → б): расщепление $\mathcal{T}F$ индуцирует расщепление $\mathcal{T}_c F$. Ему отвечает очевидное отображение пучков коэффициентов.

Выбор локальных координат (x^a) на M тривиализирует $\mathcal{T}M$, F и пучки коэффициентов. Как в § 4, соответствующие связности принимаются за начало отсчета, остальные отождествляются с их коэффициентами. Мы считаем, что $1 \leqslant d < \dim M$.

6. Предложение. а) *Пучок коэффициентов связностей на расслоении* $G_M(d;\, \mathcal{T}M) \to M$ *есть* $\Omega^1 M \otimes sl(\mathcal{T}M) = \Omega^1 M \otimes (\Omega^1 M \otimes \mathcal{T}M)_0$. *Его локальные сечения описыва-*

ются символами Кристоффеля «без второго следа»:

$$(\Gamma^c_{ab}) = \Gamma^c_{ab} dx^a \otimes dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^c}, \quad \Gamma^b_{ab} = 0.$$

б) *Отображение*
(связности на расслоении) → (полные конические связности) сюръективно и на коэффициентах выглядит так:

$$d = 1: \ \Omega^1 M \otimes (\Omega^1 M \otimes \mathcal{T}M)_0 \to (S^2(\Omega^1 M) \otimes \mathcal{T}M)_0$$

(проекция на бесследную симметричную часть);

$$d > 1: \ \Omega^1 M \otimes (\Omega^1 M \otimes \mathcal{T}M)_0 \to$$
$$\to (S^2(\Omega^1 M) \otimes \mathcal{T}M)_0 \otimes (\Lambda^2(\Omega^1 M) \otimes \mathcal{T}M)_0.$$

Доказательство. Прежде всего, $\mathcal{T}G/M = \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*$. Мы хотим показать, что $\pi_*(\mathcal{T}G/M) = sl(\mathcal{T}M)$. Точнее, имеется естественный морфизм $\pi^*(\mathcal{T}^*M) \otimes \pi^*(\mathcal{T}M) \to \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*$ (ср. § 2), индуцирующий точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_M \to gl(\mathcal{T}M) \to \pi_*(\mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*) \to 0$$

(вложение $\mathcal{O}_M$ переводит 1 в id). В стиле § 2 это можно установить так. Введем сначала многообразия полных флагов $F_1 = F_G(1, \ldots; \mathcal{S}) \xrightarrow{\pi_1} G$, $F_2 = F_G(1, \ldots; \widetilde{\mathcal{S}}) \xrightarrow{\pi_3} G$. Тогда $\mathcal{S}^* = \pi_{1*}\mathcal{L}_1(1, 0, \ldots)$, $\widetilde{\mathcal{S}}^* = \pi_{2*}\mathcal{L}_2(1,0, \ldots)$ в обозначениях § 2, где индекс $i = 1, 2$ относится к F_i. Теперь рассмотрим морфизм ρ: $F_1 \underset{G}{\times} F_2 \to G \to M$. Тогда $\pi_*(\mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*) = \rho_*(\mathcal{L}_1(\varepsilon_1) \boxtimes \mathcal{L}_2(\varepsilon_2))$. С другой стороны, ρ является также композицией $F_1 \underset{G}{\times} F_2 \to P(\mathcal{T}M) \underset{M}{\times} P(\mathcal{T}^*M) \to M$. Спуск вдоль первой стрелки приведет к пучку $\mathcal{T}M^* \otimes \mathcal{T}M$, поднятому на $P_M(\mathcal{T}M) \underset{M}{\times} P_M(\mathcal{T}^*M)$ и затем ограниченному на пространство инцидентности $F_M(1, m-1; \mathcal{T}M) \subset P(\mathcal{T}M) \underset{M}{\times} P(\mathcal{T}^*M)$. При этом ограничении обратятся в нуль сечения, пропорциональные $\mathrm{id}_{\mathcal{T}(M)}$. Еще один спуск приведет к пучку $sl(\mathcal{T}M)$ на M. Отсюда следует утверждение а).

Далее, пучок коэффициентов полной конической связности равен

$$\pi_*(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*) = \pi_*(S^2(\mathcal{S}^*) \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*) \oplus \pi_*(\Lambda^2(\mathcal{S}^*) \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*).$$

Действуя, как выше, мы сведем вычисление к описанию прямых образов пучков $\mathcal{L}(2, 0, \ldots) \boxtimes \mathcal{L}(1, 0, \ldots)$ для S^2

и $\mathscr{L}(1, 1, 0, \ldots) \boxtimes (\mathscr{L}(1, 0, \ldots)$ для Λ^2. На расслоенном произведении получится $S^2(\mathscr{T}^*M) \otimes \mathscr{T}M$ и $\Lambda^2\mathscr{T}^*M \otimes \mathscr{T}M$ соответственно, а после ограничения на флаг инцидентности останутся бесследные части. ■

7. Пучок коэффициентов общей конической связности. Напишем точную последовательность (1), кроме F, также для полной конической структуры G и ограничим последнюю на F. Очевидно, что $(1)_F$ вкладывается в это ограничение:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varphi^*(\mathscr{T}G/M) \arrow[r] & \varphi^*(\mathscr{T}_c G) \arrow[r, "d\pi"] & \varphi^*(\mathscr{S}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{T}F/M \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{T}_c F \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{S}_F \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Не каждое расщепление $(1)_G$ индуцирует некоторое расщепление $(1)_F$, потому что горизонтальная d-мерная площадка, отмеченная в точке F, может не касаться F. Пучки коэффициентов полной конической связности и связности на F можно сравнить, используя промежуточный пучок $\pi_*\left(\mathscr{S}_F^* \otimes \varphi^*(\mathscr{T}G/M)\right)$ и диаграмму

$$\pi_*\left(\mathscr{S}_F^* \otimes \mathscr{T}F/M\right) \xrightarrow{\alpha} \pi_*\left(\mathscr{S}_F^* \otimes \varphi^*(\mathscr{T}G/M)\right) \xleftarrow{\beta} \pi_*\left(\mathscr{S}^* \otimes \mathscr{T}G/M\right).$$

Чтобы разобраться в структуре β и α, обозначим через J_F пучок идеалов F в $G = G_M(d, \mathscr{T}M)$ и воспользуемся тем, что для любого когерентного пучка $\mathscr{E}$ на G можно написать точную последовательность $0 \to J_F\mathscr{E} \to \mathscr{E} \to \varphi^*(\mathscr{E}) \to 0$ (здесь для краткости $\varphi^*(\mathscr{E})$ означает продолжение этого пучка нулем на G). В частности, имеем на G:

$$0 \to J_F(\mathscr{S}^* \otimes \mathscr{T}G/M) \to \mathscr{S}^* \otimes \mathscr{T}G/M \xrightarrow{\beta'} \varphi^*(\mathscr{S}_F \otimes \mathscr{T}G/M) \to 0 \qquad (2)$$

и $\beta = \pi_*(\beta')$.

Далее, пусть $\mathscr{N}_F = \varphi^*\left(J_F/J_F^2\right)$ — нормальный пучок к F в G. Тогда имеет место точная последовательность на F:

$$0 \to \mathscr{S}_F^* \otimes \mathscr{T}F/M \xrightarrow{\alpha'} \mathscr{S}_F^* \otimes \varphi^*(\mathscr{T}G/M) \to \mathscr{S}_F^* \otimes \mathscr{N} \to 0 \qquad (3)$$

и $\alpha = \pi_*(\alpha')$.

Пользуясь (2) и (3), получаем следующие результаты.

8. Предложение. а) *Отображение α инъективно, а его коядро изоморфно*

$$\operatorname{Ker}\left(\pi_*\left(\mathscr{S}_F^* \otimes \mathscr{N}\right) \to R^1\pi_*\left(\mathscr{S}_F^* \otimes \mathscr{T}F/M\right)\right).$$

б) *Ядро и коядро отображения* β *суть соответственно пучки*

$$\pi_*(J_F(\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/M)),$$

$$\operatorname{Ker}(R^1\pi_*(J_F(\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/M))\to R^1\pi_*(\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/M)). \quad \blacksquare$$

В частности, если $R^1\pi_*(J_F(\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/M))=0$, то β сюръективно, так что d-конические связности по-прежнему можно описывать локально символами Кристоффеля, на которые, возможно, наложены дополнительные условия (описывающие образ α) и которые рассматриваются по модулю некоторого отношения эквивалентности (отвечающего ядру β).

9. Кривизны и пучки кривизны. В соответствии с п. 5.1, конические связности, будучи распределениями на пространстве конической структуры $F\to M$, имеют формы Фробениуса. Спущенные на M, они превращаются в кривизны связностей, сечения пучков кривизны. Опишем вкратце эти пучки.

а) *Связности на расслоении.* Пусть $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}F$, $F\xrightarrow{\pi}M$ — связность на расслоении, т. е. $d\pi$: $\mathscr{T}\xrightarrow{\sim}\pi^*\mathscr{T}M$. Тогда $\Phi\in\pi_*(\Lambda^2\mathscr{T}^*M\otimes\mathscr{T}F/\mathscr{T})\simeq\Omega^2M\otimes\pi_*\mathscr{T}F/\mathscr{T}$. Иными словами, кривизна является 2-формой на базе со значениями в вертикальных векторных полях расслоения, как в дифференциальной геометрии.

б) *Полные конические связности.* Пусть $G=G_M(d;\mathscr{T}M)\to\to M$. Пучок $\Lambda^2\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/\mathscr{T}$, в котором лежит кривизна полной конической связности $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}G$, здесь явно зависит от $\mathscr{T}$. Однако он представим в виде расширения двух пучков, от $\mathscr{T}$ уже не зависящих: отфакторизовав $\mathscr{T}G\xrightarrow{d\pi}\xrightarrow{d\pi}\pi^*(\mathscr{T}M)$ по $\mathscr{T}\xrightarrow{d\pi}\mathscr{S}$, получим точную последовательность (нулевую при $d=1$)

$$0\to\Lambda^2\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/M\to\Lambda^2\mathscr{S}^*\otimes\mathscr{T}G/\mathscr{T}\xrightarrow{\beta}\Lambda^2\mathscr{S}^*\otimes\widetilde{\mathscr{S}}^*\to 0.$$

Условие интегрируемости при $d>1$ разбивается на два. Пусть $\Phi_0\in H^0(M,\ \Lambda^2\mathscr{S}^*\otimes\widetilde{\mathscr{S}}^*)=(\Omega^2M\otimes\mathscr{T}M)_0$ — образ формы Фробениуса относительно $\pi_*(\beta)$. Первое условие интегрируемости состоит в обращении в нуль Φ_0.

Если это условие выполнено, то $\Phi\in H^0(M,\pi_*(\Lambda^2\mathscr{S}^*\otimes\otimes\mathscr{T}G/H))\subset\Omega^2M\otimes sl(\mathscr{T}M)$. Эта истинная кривизна должна также обращаться в нуль.

в) *Общие конические связности.* Как в предыдущем пункте, заменив G на F и $\mathscr{S}$, $\widetilde{\mathscr{S}}$ на $\mathscr{S}_F$, $\widetilde{\mathscr{S}}_F$, можно написать точную последовательность для пучка форм Фробениуса и ввести сечение $\Phi_0 \in H^0(M, \pi_*(\Lambda^2\mathscr{S}_F^*\otimes\widetilde{\mathscr{S}}_F^*))$ и, при $\Phi_0 = 0$, подлинную кривизну $\Phi \in H^0(M, \pi_*(\Lambda^2\widetilde{\mathscr{S}}_F \otimes \mathscr{T}F/M))$.

Можно сравнить эти пучки с соответствующими пучками для $F = G$ по образцу обсуждения в п. 7. В следующем параграфе мы проведем подробные вычисления в важном частном случае.

§ 7. Грассмановы спиноры и обобщенные уравнения автодуальности

1. Определение. *Многообразием с грассмановой спинорной структурой* (кратко: ГС-*многообразием*) называется четверка $(M, \mathscr{S}, \widetilde{\mathscr{S}}, \sigma)$, где M — комплексное многообразие, $\mathscr{S}$, $\widetilde{\mathscr{S}}$ — локально свободные пучки (спиноров) на нем рангов $d > 1$, $c > 1$ соответственно, σ: $\mathscr{S} \otimes \widetilde{\mathscr{S}} \to \Omega^1 M$ — изоморфизм (спинорное разложение 1-форм). ■

ГС-многообразия образуют категорию, в которой морфизм $(M, \mathscr{S}, \widetilde{\mathscr{S}}, \sigma) \to (M', \mathscr{S}', \widetilde{\mathscr{S}}', \sigma')$ состоит из открытого вложения φ: $M \to M'$ и пары изоморфизмов $\mathscr{S} \xrightarrow{\alpha} \varphi^*(\mathscr{S}')$, $\widetilde{\mathscr{S}} \xrightarrow{\beta} \varphi^*(\mathscr{S}')$, совместимых с σ и σ' в том смысле, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S} \otimes \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha\otimes\beta"'] & \Omega^1 M \arrow[d, "d\varphi"] \\
\varphi^*(\mathscr{S}' \otimes \widetilde{\mathscr{S}}') \arrow[r, "\varphi^*(\sigma')"] & \varphi^*(\Omega^1 M')
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть σ^t: $\widetilde{\mathscr{S}} \otimes \mathscr{S} \to \Omega^1 M$ — композиция σ, перестановки сомножителей и изменения знака. Мы будем говорить, что ГС-многообразие $(M, \widetilde{\mathscr{S}}, \mathscr{S}, \sigma^t)$ получилось из $(M, \mathscr{S}, \widetilde{\mathscr{S}}, \sigma)$ сменой ориентации на противоположную.

Согласно теореме 1.6 грассманиан $G(d; T^{d+c})$ обладает канонической ГС-структурой. Общую ГС-структуру мы можем рассматривать как искривление этой плоской. Все свойства грассманиана, использующие только спинорное разложение 1-форм, переносятся на общие ГС-структуры. К их числу относятся: разложение 2-форм (и вообще комплекса де Рама), как в п. 1.9; возможность определить три конические структуры разложимых касательных направлений — размерностей 1, d и c (п. 4.2).

Пусть h — связность на стандартной c-конической структуре $F \xrightarrow{\pi} M$ данного ГС-многообразия.

2. Определение. Дифференциальное уравнение на коэффициенты связности h, выражающее ее интегрируемость, называется *уравнением автодуальности* для ГС-многообразия $(M, \mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{S}}, \sigma)$.

ГС-многообразие вместе с интегрируемой c-конической связностью на нем называется *автодуальным* или *левоплоским* ГС-многообразием. ■

Антиавтодуальным или правоплоским ГС-многообразием называется ГС-многообразие вместе с интегрируемой конической связностью на d-конической структуре. Смена ориентации превращает левоплоские многообразия в правоплоские и наоборот. С точностью до ориентации такие многообразия можно называть полуплоскими.

Второе уравнение автодуальности, которое мы здесь рассмотрим, относится к связностям на локально свободных пучках (или векторных расслоениях) над ГС-многообразием. Пусть $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1 M$ — ковариантный дифференциал связности, $F(\nabla) = F_+(\nabla) + F_-(\nabla) \in \operatorname{End} \mathcal{E} \otimes \Omega^2 M$ — его кривизна, где $F_\pm(\nabla) \in \operatorname{End} \mathcal{E} \otimes \Omega^2_\pm M$, и $\Omega^2_\pm M$ определены, как в п. 1.9.

3. Определение. Дифференциальное уравнение на коэффициенты связности ∇, выражающее обращение в нуль $F_+(\nabla)$, называется *автодуальным уравнением Янга — Миллса* на ГС-многообразии. ■

Ниже мы выясним структуру уравнений автодуальности, в частности их вид в координатах. Кроме того, мы покажем, что на автодуальном ГС-многообразии автодуальные уравнения Янга — Миллса сами представимы в виде условий интегрируемости, а именно интегрируемости связности $\pi^*(\nabla)$ вдоль слоев слоения, касающегося h.

4. Координаты и коэффициенты. Как в § 2, выберем локальные координаты (x^a) на M и локальную тривиализацию пучков $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ сечениями w^α и $z^{\dot\beta}$ соответственно, $\alpha = 1, \ldots, d$; $\beta = 1, \ldots, c$. ГС-структура определяется $(cd)^2$ функциями e на M, которые описывают спинорное разложение

$$\sigma^{-1}(dx^a) = e^a_{\alpha\dot\beta} w^\alpha \otimes z^{\dot\beta},$$

или, в двойственных базисах,

$$e^{a}_{\alpha\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{a}}=(\sigma^{*})^{-1}\left(w_{\alpha}\otimes z_{\dot{\beta}}\right).$$

Выбор координат тривиализирует ряд расслоений и, как выше, дает начало отсчета для описания всевозможных связностей их коэффициентами.

В частности, ковариантный дифференциал на $\mathcal{S}$ $\nabla\colon \mathcal{S}\to\mathcal{S}\otimes\Omega^{1}M$ можно задавать коэффициентами $\omega^{\alpha}_{\beta a}$ или $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot{\delta}}=e^{a}_{\gamma\dot{\delta}}\omega^{\alpha}_{\beta a}$:

$$\nabla w^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta a}w^{\beta}\otimes dx^{a},$$

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{S}}\otimes\sigma^{-1})(\nabla w^{\alpha})=\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot{\delta}}\otimes w^{\beta}\otimes w^{\gamma}\otimes z^{\dot{\delta}}.$$

Согласно предложению 5.10 ∇ индуцирует связность на расслоении $F=P_{M}(\mathcal{S}^{*})\xrightarrow{\pi}M$. Она зависит лишь от бесследной части $\omega^{\alpha}_{\beta a}$ (свертка по α, β), и так получаются все связности на этом расслоении.

В свою очередь связность на расслоении F индуцирует c-коническую связность на M. Действительно, согласно п. 4.2, c-коническая структура определяется таким замкнутым вложением $F\to G_{M}(c;\,\mathcal{T}M)$, для которого тавтологический флаг грассманиана индуцирует флаг на F:

$$\pi^{*}(\widetilde{\mathcal{S}}^{*})(-1)\subset\pi^{*}(\widetilde{\mathcal{S}}^{*})\otimes\pi^{*}(\mathcal{S}^{*})=\pi^{*}(\mathcal{T}M).$$

Коническая связность есть подъем в $\mathcal{T}F$ подпучка $\pi^{*}(\widetilde{\mathcal{S}}^{*})(-1)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{T}F/M \arrow[r] & \mathcal{T}F \arrow[r, "d\pi"] & \pi^{*}(\mathcal{T}M) \arrow[r] & 0 \\
 & & & \pi^{*}(\widetilde{\mathcal{S}}^{*})(-1) \arrow[u, phantom, "\cup"] &
\end{tikzcd}$$

Поэтому проективная связность на F, которая определяет подъем всего $\pi^{*}(\mathcal{T}M)$, определяет и подъем подпучка. На пучках коэффициентов связности соответствующее отображение сюръективно и может быть описано как симметризация по $\beta\gamma$ в координатах. В самом деле, это отображение представляет собой $\pi_{*}(\varphi)$, где φ — морфизм в точной последовательности

$$0 \to \mathcal{T}F/M \otimes \Omega^1 F/M\,(1) \otimes \pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}) \to \mathcal{T}F/M \otimes \pi^*\,(\mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}) \xrightarrow{\varphi}$$
$$\to \mathcal{T}F/M \otimes \pi^*\,(\widetilde{\mathcal{S}})\,(1) \to 0.$$

Сюръективность $\pi_*\,(\varphi)$ следует из того, что $R^1\pi_*\,(\mathcal{T}F/M \otimes \otimes \Omega^1 F/M(1)) = 0$, а это в свою очередь получается из теоремы 2.2, если применить ее к точной последовательности $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \pi^*(\mathcal{S}^*) \to \mathcal{T}F/M(-1) \to 0$, тензорно умноженной на $\Omega^1 F/M(2)$:

$$0 \to \Omega^1 F/M(1) \to \pi^*(\mathcal{S}^*) \otimes \Omega^1 F/M(2) \to$$
$$\to \mathcal{T}F/M \otimes \Omega^1 F/M(1) \to 0.$$

Эта же последовательность позволяет вычислить $\pi_*\,(\mathcal{T}F/M \otimes \otimes \Omega^1 F/M(1))$ и затем ядро $\pi_*\,(\varphi)$: опять в силу теоремы 2.2 имеем

$$0 \to \mathcal{S}^* \otimes \pi_*\,(\Omega^1 F/M\,(2)) \xrightarrow{\sim} \pi_*\,(\mathcal{T}F/M \otimes \Omega^1 F/M\,(1)) \to 0,$$

и затем из последовательности $0 \to \Omega^1 F/M(2) \to \pi^*(\mathcal{S})(1) \to \to \mathcal{O}(2) \to 0$ получаем

$$\pi_*\,(\Omega^1 F/M\,(2)) = \operatorname{Ker}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \to S^2\,(\mathcal{S})) = \Lambda^2 \mathcal{S}.$$

Окончательно, ядро $\pi_*\,(\varphi)$ состоит из бесследных символов $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot\delta}$, антисимметричных по $\beta\gamma$, откуда и вытекает, что $\pi_*\,(\varphi)$ можно отождествить с симметризацией.

Резюмируем полученное описание. Постулировав, что препятствия к существованию связностей обращаются в нуль, мы получаем следующие инвариантно определенные сюръективные отображения:

$$\begin{pmatrix}\text{связности}\\ \text{на } \mathcal{S}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\text{связности на рас-}\\ \text{слоении } P_M(\mathcal{S}^*)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}c\text{-конические связ-}\\ \text{ности на } M\end{pmatrix},$$
$$\left(\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot\delta}\right) \to \left(\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot\delta} \bmod \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma_{\gamma\dot\delta}\right) \to \left(\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot\delta} \bmod \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma_{\gamma\dot\delta} + \tilde{\omega}^{\alpha}_{[\beta\gamma]\delta}\right).$$

Стрелки в обратную сторону, т. е. выбор, скажем, для описания c-конических связностей бесследных антисимметрических символов, которые определяют связность на $\mathcal{S}$, зависят уже от системы координат.

5. Кручение ГС-структуры. Пусть h: $\pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^*)(-1) \to \to \mathcal{T}F$ — некоторая c-коническая связность. У ее формы Фробениуса Φ, согласно п. 6.9, есть канонически определенный фактор: $\Phi_0(h) = d\pi(\Phi(h))$. Этот фактор $\Phi_0(h)$

отображает $\pi^*(\Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}^*(-2))$ в $\pi^*(\widetilde{\mathcal{T}}M)/\pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^*)(-1)$:

$$\Phi_0(h)(X, Y) = d\pi[(h(X), h(Y)]) \operatorname{mod} \pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^*)(-1),$$

где X, Y — локальные сечения $\widetilde{\mathcal{S}}^*(-1)$.

Нетрудно вычислить пучок на M, с сечением которого можно отождествить Φ_0. Умножим стандартную точную последовательность $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \pi^*\widetilde{\mathcal{S}}^* \to \mathcal{T}F/M(-1) \to 0$ на $\pi^*\widetilde{\mathcal{S}}^*$. Результат можно записать в виде

$$0 \to \pi^*\widetilde{\mathcal{S}}^*(-1) \to \pi^*(\mathcal{T}M) \to \mathcal{T}F/M(-1) \otimes \pi^*\widetilde{\mathcal{S}}^* \to 0. \quad (1)$$

Поэтому $\Phi_0(h)$ лежит в $H^0(F, \mathcal{T}F/M(1) \otimes \pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^* \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}})) = H^0(M, \widetilde{\mathcal{S}}^* \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}} \otimes (S^2\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}^*)_0)$. Разложим $\Phi_0(h)$ на две неприводимые компоненты:

$$\Phi_0(h) = \Phi_0^{(1)}(h) + \Phi_0^{(2)}(h),$$

$$\Phi_0^{(1)}(h) \in (\widetilde{\mathcal{S}}^* \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}})_0 \otimes (S^2\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}^*)_0,$$

$$\Phi_0^{(2)}(h) \in i(\widetilde{\mathcal{S}}) \otimes (S^2\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}^*)_0,$$

где i: $\widetilde{\mathcal{S}} \to \widetilde{\mathcal{S}}^* \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}$ определяется формулой $i\left(z^{\dot\alpha}\right) = z_{\dot\beta} \otimes \otimes z^{\dot\beta} \wedge z^{\dot\alpha}$. (Здесь мы пишем $\Phi \in \mathcal{T}$ вместо $\Phi \in H^0(\mathcal{T})$ для краткости.)

6. Теорема. а) *$\Phi_0^{(1)}(h)$ не зависит от выбора h. Элемент*

$$t_+(M) = \Phi_0^{(1)}(h) \in \Omega_+^2 M \otimes \mathcal{T}M$$

называется левым кручением ГС-структуры σ на M. Аналогично определяется правое кручение $t_-(M) \in \Omega_-^2 M \otimes \mathcal{T}M$ с помощью выбора связности на конической d-структуре.

б) *Существует единственная c-коническая связность h, для которой $\Phi_0^{(2)}(h) = 0$. Только она может быть интегрируемой; кроме условия $t_+(M) = 0$, для ее интегрируемости необходимо и достаточно, чтобы ее подъем до связности на $P_M(\mathcal{S}^*)$ имел кривизну, целиком лежащую в $\Omega_-^2 M \otimes sl(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Выясним, как меняется $\Phi_0(h)$ при замене h на $h + \omega$, где ω: $\pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^*)(-1) \to \mathcal{T}F/M$ — любое сечение пучка коэффициентов c-конической связности. Прежде всего, имеем в силу определения Φ_0

$$[\Phi_0(h+\omega)-\Phi_0(h)](X,\ Y)=$$
$$=d\pi([\omega(X),\ h(Y)]-[\omega(Y),\ h(X)])\operatorname{mod}\pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^*)(-1).$$

Член $[\omega(X),\ \omega(Y)]$ справа опущен, ибо $\mathcal{T}F/M=\operatorname{Ker}d\pi$ — интегрируемое распределение. По этой же причине правая часть формулы не меняется, если заменить h на $h'=h+\omega'$. Далее, от ω правая часть зависит $\mathcal{O}_F$-линейно. В самом деле,

$$[f\omega(X),\ h(Y)]-f[\omega(X),\ h(Y)]=-(h(Y)f)\omega(X)\in\operatorname{Ker}d\pi.$$

Таким образом, па F имеется морфизм пучков

$$\omega\mapsto\Phi_0(h+\omega)-\Phi_0(h)\colon\ \pi^*(\widetilde{\mathcal{S}})\otimes\mathcal{T}F/M(1)\to$$
$$\to\mathcal{H}om\,(\Lambda^2\pi^*\widetilde{\mathcal{S}}^*(-2),\ \mathcal{T}F/M(-1)\otimes\pi^*\widetilde{\mathcal{S}}^*).$$

Мы ничего не потеряем, рассмотрев его спуск на M:

$$\lambda\colon\ \widetilde{\mathcal{S}}\otimes\pi_*(\mathcal{T}F/M(1))\to\widetilde{\mathcal{S}}^*\otimes\Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}\otimes\pi_*(\mathcal{T}F/M(1)).$$

Из соображений функториальности по $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$ и элементарных фактов теории представлений ясно, что λ должен быть пропорционален $i\otimes\mathrm{id}$, где i определен в конце предыдущего пункта. Существенно проверить, что $\lambda\neq0$, тогда, исходя из любой начальной связности h, мы сможем подобрать однозначно поправку ω так, чтобы $\Phi_0^{(2)}(h+\omega)=0$. Независимость $\Phi_0^{(1)}(h)$ от h уже ясна.

Для вычислений в координатах зададим сначала h. Удобнее, пе вводя знаменателей, определить $h(1)=h\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{O}(1)}$ формулами

$$h\,(1)\left(z_{\dot\beta}\right)=e^{a}_{\alpha\dot\beta}w^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{a}}.$$

Из-за этого остальные отображения и сечения тоже окажутся подкрученными:

$$(h+\omega)\,(1)\left(z_{\dot\delta}\right)=e^{a}_{\alpha\dot\delta}w^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{a}}+\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot\delta}w^{\beta}w^{\gamma}\otimes\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}.$$

Чтобы вычислить $t_+(M)$, мы должны сначала прокоммутировать подъемы $z_{\dot\delta}$ и $z_{\dot\varepsilon}$:

$$\Phi_0\,(h)\,(2)\left(z_{\dot\delta},\ z_{\dot\varepsilon}\right)=\left[e^{a}_{\alpha\dot\delta}w^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{a}},\ e^{b}_{\beta\dot\varepsilon}w^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{b}}\right]\operatorname{mod}\pi^*\,(\widetilde{\mathcal{S}}^*)\,(1)=$$
$$=2e^{a}_{\alpha[\dot\delta}\partial_a e^{b}_{\beta\dot\varepsilon]}w^{\alpha}w^{\beta}\partial_{\iota}\operatorname{mod}\pi^*\,(\widetilde{\mathcal{S}}^*)\,(1),$$

где мы пишем ∂_a вместо $\partial/\partial x^a$. Теперь, чтобы спустить правую часть на M в соответствии с (1), мы должны заменить ∂_b на $e_b^{\rho\dot{\sigma}}\dfrac{\partial}{\partial w^\rho}\otimes z_{\dot{\sigma}}$ и затем заменить здесь $\dfrac{\partial}{\partial w^\rho}$ на w_ρ. Таким образом:

$$\Phi_0(h)(2) = e^{a}_{\alpha[\dot{\delta}}\partial_a\sigma^{b}_{\beta\dot{\varepsilon}]}e_b^{\rho\dot{\sigma}}w^\alpha w^\beta\otimes w_\rho\otimes z_{\dot{\sigma}}\otimes z^{\dot{\delta}}\otimes z^{\dot{e}} =$$

$$= -e^{a}_{\alpha[\dot{\delta}}e^{b}_{\beta\dot{\varepsilon}]}\partial_\alpha\sigma_b^{\rho\dot{\sigma}}w^\alpha w^\beta\otimes w_\rho\otimes z_{\dot{\sigma}}\otimes z^{\dot{\delta}}\otimes z^{\dot{\varepsilon}}.$$

Аналогично

$$\lambda(\omega)(2)\left(z_{\dot{\delta}},\ z_{\dot{\varepsilon}}\right) = \omega^{\alpha}_{\beta\gamma[\dot{\delta}}e^{a}_{\alpha\dot{\varepsilon}]}w^\beta\otimes w^\gamma\frac{\partial}{\partial x^a}\bmod \pi^*(\widetilde{\mathscr{S}}^*)(1)$$

и после спуска на M

$$\lambda(\omega) = \omega^{\alpha}_{\beta\gamma[\dot{\delta}}e^{a}_{\alpha\dot{\varepsilon}]}e_a^{\rho\dot{\sigma}}w^\beta\otimes w^\gamma w_\rho\otimes z_{\dot{\sigma}}\otimes z^{\dot{\delta}}\otimes z^{\dot{\varepsilon}} =$$

$$= \omega^{\alpha}_{\beta\gamma[\dot{\delta}}\delta^{\rho\dot{\sigma}}_{\alpha\dot{\varepsilon}]}w^\beta\otimes w^\gamma\otimes w_\rho\otimes z_{\dot{\sigma}}\otimes z^{\dot{\delta}}\otimes z^{\dot{e}}.$$

Поэтому ω находится из условия $\lambda(\omega) = -\Phi_0^{(2)}(h)$, т. е.

$$\omega^{\alpha}_{\beta\gamma\dot{\delta}} = \frac{1}{c}e^{a}_{\beta\dot{\delta}}\sigma^{b}_{\gamma\dot{\varepsilon}}\partial_a e_b^{\alpha\dot{\varepsilon}}.$$

Пусть теперь h — та единственная c-коническая связность, для которой $\Phi_0^{(2)}(h) = 0$ (раньше ее роль играла $h+\omega$). Ясно, что если $t_+(M)\neq 0$, то она не может быть интегрируемой. При $t_+(M) = 0$, однако, форма Фробениуса $\Phi(h)$ принимает значения в $(d\pi)^{-1}(\widetilde{\mathscr{S}}^*(-1))\bmod h(\widetilde{\mathscr{S}}^*(-1))$. Этот пучок на F можно отождествить с $\mathscr{T}F/M$, причем так, что это отождествление совместимо с соответствующим отождествлением для связности $\tilde{h}$ на расслоении $P_M(\mathscr{S}^*)$, которая продолжает h.

Таким образом, форма Фробениуса для h

$$\Phi\colon \Lambda^2\pi^*\widetilde{\mathscr{S}}(-2)\to\mathscr{T}F/M$$

будет ограничением формы Фробениуса для $\tilde{h}$

$$\widetilde{\Phi}\colon \Lambda^2\pi^*\mathscr{T}M\to\mathscr{T}F/M.$$

Спуская эти формы на M, мы находим, что это ограничение совпадает с $\Omega^2_+M = S^2(\mathscr{S})\otimes\Lambda^2(\widetilde{\mathscr{S}})$ -компонентой кривизны

$\hbar$. Следовательно, ее обращение в нуль является последним условием интегрируемости h и полуплоскости ГС-структуры M. ■

7. Левый комплекс де Рама автодуального многообразия. Пусть $(M, \mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{S}}, \sigma)$ — автодуальное многообразие, $F = P_M(\mathcal{S}^*)$, $\mathcal{T}F/L \subset \mathcal{T}F$ — интегрируемое распределение, отвечающее единственной интегрируемой c-связности на нем. По определению $d\pi$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{T}F/L \xrightarrow{\sim} \pi^*(\widetilde{\mathcal{S}}^*)(-1)$, поэтому мы можем канонически отождествить $\Omega^i F/L$ с $\pi^*(\Lambda^i\widetilde{\mathcal{S}})(i)$. Рассмотрим комплекс де Рама распределения $\mathcal{T}F/L$:

$$\mathcal{O}_F \xrightarrow{d_{F/L}} \pi^*\widetilde{\mathcal{S}}(1) \xrightarrow{d_{F/L}} \pi^*\Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}(2) \to \dots$$

и его спуск на M:

$$\mathcal{O}_M \xrightarrow{\pi_*(d_{F/L})} \mathcal{S}\otimes\widetilde{\mathcal{S}} = \Omega^1 M \xrightarrow{\pi_*(d_{F/L})} S^2\mathcal{S}\otimes\Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}} \to \dots$$

Пучки, входящие в спущенный комплекс, естественным образом отождествляются с прямыми слагаемыми комплекса де Рама на M: действительно, имеет место стандартная формула тензорной алгебры

$$\Lambda^i(\mathcal{S}\otimes\widetilde{\mathcal{S}}) = \bigoplus_{|a|=i} S^{(a)}(\mathcal{S})\otimes S^{(a^t)}(\widetilde{\mathcal{S}}),$$

где $(a) = (a_1, \dots, a_k)$, $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_k \geqslant 0$, $|a| = \sum_{j=1}^{k} a_j$; (a^t) — последовательность, отвечающая двойственной диаграмме Юнга; функторы $S^{(a)}$ определены в п. 2.8. Нам, впрочем, нужно лишь вложение $S^i(\mathcal{S})\otimes\Lambda^i(\widetilde{\mathcal{S}}) \to \Lambda^i(\mathcal{S}\otimes\widetilde{\mathcal{S}})$, которое строится совершенно очевидным образом, и проектор p_i на образ.

8. Предложение. *Спуск на M комплекса де Рама интегрируемой c-связности изоморфен факторкомплексу де Рама*

$$\left(S^i(\mathcal{S})\otimes\Lambda^i(\widetilde{\mathcal{S}}),\quad p_i\circ d\circ p_i\right).$$

Доказательство. Отображение факторизации $p_i\colon \Omega^i M \to \pi_*\Omega^i F/L$ строится следующим образом: поднимем форму ω^i на F и рассмотрим ее как полилинейную функцию только от полей из $\mathcal{T}F/L$. Один взгляд на явные формулы для внешнего дифференциала из п. 5.7 показывает, что ограничение на интегрируемое горизонтальное распределение коммутирует с внешним дифференциалом. ■

Пусть теперь $(\mathscr{E}, \nabla)$ — локально свободный пучок со связностью на автодуальном ГС-многообразии M. На $\pi^*(\mathscr{E})$ можно определить ковариантный дифференциал $\nabla_{F/L}$ вдоль слоения $\mathscr{T}F/L$. В самом деле, определим сначала подъем связности $\pi^*(\nabla)$: $\pi^*(\mathscr{E}) \to \pi^*(\mathscr{E}) \otimes \Omega^1 F$, положив $\pi^*(\nabla)(\sum f_i e_i) = \sum (f_i \nabla e_i + e_i \otimes df_i)$, где e_i — локальные сечения $\pi^*(\mathscr{E})$, поднятые с $\mathscr{E}$, f_i — локальные функции на F. После этого образуем композицию $\pi^*(\nabla)$ с ограничением на $\Omega^1 F/L$, это и будет $\nabla_{F/L}$.

9. Теорема. а) $(\mathscr{E}, \nabla)$ *удовлетворяет автодуальному уравнению Янга — Миллса на автодуальном* ГС-*многообразии* M, *если и только если* $(\pi^*(\mathscr{E}), \nabla_{F/L})$ *интегрируемо вдоль слоев слоения* $\mathscr{T}F/L$.

б) *При условии* а) *спуск на* M *относительного комплекса де Рама* $(\pi^*(\mathscr{E}) \otimes \Omega^i F/L, \nabla_{F/L})$ *имеет вид* $(\mathscr{E} \otimes S^i(\mathscr{S}) \otimes \Lambda^i(\widetilde{\mathscr{S}}), (\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \otimes p_i) \circ \nabla)$, *где* p_i *определен как в* п. 8.

Следствие. *Пусть* ∇: $\mathscr{S} \to \mathscr{S} \otimes \Omega^1 M$ — *такая связность на* $\mathscr{S}$, *кривизна которой лежит в* $sl(\mathscr{S}) \otimes \Omega^2 M$. *Она индуцирует каноническую интегрируемую связность на автодуальном* ГС-*многообразии* $(M, \mathscr{S}, \widetilde{\mathscr{S}}, \sigma)$, *если и только если* $(\mathscr{S}, \nabla)$ *удовлетворяет автодуальному уравнению Янга — Миллса на нем.*

Доказательство. То же рассуждение, что в предыдущем пункте, сразу доказывает утверждение б), если рассматривать формы со значениями в $\mathscr{E}$ вместо «скалярных» форм. Поэтому спуск на M морфизма $\nabla^2_{F/L}$: $\pi^*(\mathscr{E}) \to \pi^*(\mathscr{E}) \otimes \otimes \Omega^2 F/L$, представляющего относительную кривизну, является композицией кривизны ∇^2: $\mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \Omega^2 M$ и проекции $\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \otimes p_2$. Но p_2 проектирует $\Omega^2 M$ на $\Omega^2_+ M$. Отсюда следует утверждение б). Следствие относительно автодуальности $(\mathscr{S}, \nabla)$ вытекает отсюда с учетом теоремы 6, б), и того, что кривизну ∇ можно отождествить с кривизной индуцированной связности на $P_M(\mathscr{S}^*)$. ■

10. Уравнения Дирака для грассмановых спиноров. Левым оператором Дирака на ГС-многообразии $(M, \mathscr{S}, \widetilde{\mathscr{S}}, \sigma)$, отвечающим связности ∇: $\mathscr{S}^* \to \mathscr{S}^* \otimes \Omega^1 M$, называется композиция

$$D\colon\ \mathscr{S}^* \xrightarrow{\nabla} \mathscr{S}^* \otimes \Omega^1 M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \sigma^{-1}} \mathscr{S}^* \otimes \mathscr{S} \otimes \widetilde{\mathscr{S}} \to \widetilde{\mathscr{S}},$$

где последняя стрелка — свертка $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}^*$. Аналогично, по

$(\widetilde{\mathscr{S}}^*, \widetilde{\nabla})$ можно определить правый оператор Дирака:

$$\widetilde{D}\colon\ \widetilde{\mathscr{S}}^* \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} \widetilde{\mathscr{S}}^*\otimes\Omega^1 M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\sigma^{-1}} \widetilde{\mathscr{S}}^*\otimes\mathscr{S}\otimes\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}.$$

Предположим, что у нас есть два морфизма пучков — «массовые матрицы»: $\widetilde{M}\colon \widetilde{\mathscr{S}}^* \to \widetilde{\mathscr{S}}$ и $M\colon \mathscr{S}^* \to \mathscr{S}$. Тогда мы можем написать уравнения Дирака для пары локальных сечений ψ, $\widetilde{\psi}$ пучков $\mathscr{S}^*$ и $\widetilde{\mathscr{S}}^*$:

$$D\psi = \widetilde{M}\widetilde{\psi},$$
$$\widetilde{D}\psi = M\psi.$$

В координатах они принимают следующий вид. Положим

$$\psi = \psi^{\alpha} w_{\alpha}, \quad \widetilde{\psi} = \psi^{\dot\beta} z_{\dot\beta};$$
$$\nabla w_{\alpha} = -\,\omega^{\beta}_{\alpha a} w_{\beta}\otimes dx^{a}, \quad \widetilde{\nabla} z_{\dot\alpha} = -\,\omega^{\dot\gamma}_{\dot\beta a} z_{\dot\gamma}\otimes dx^{a}.$$

Пусть далее $\partial_{\alpha\dot\beta} = e^{a}_{\alpha\dot\beta}\partial_a$ и $\omega_{\alpha\dot\beta} = \omega^{\gamma}_{\alpha a} e^{a}_{\gamma\dot\beta}$, $\widetilde{\omega}_{\alpha\dot\beta} = \widetilde{\omega}^{\dot\gamma}_{\dot\beta a} e^{a}_{\alpha\dot\gamma}$. В таких обозначениях уравнения Дирака записываются так:

$$\partial_{\alpha\dot\beta}\psi^{\alpha} - \omega_{\alpha\dot\beta}\psi^{\alpha} = \widetilde{M}_{\dot\gamma\dot\beta}\psi^{\dot\gamma},$$
$$\partial_{\alpha\dot\beta}\psi^{\dot\beta} - \widetilde{\omega}_{\alpha\dot\beta}\psi^{\dot\beta} = M_{\alpha\beta}\psi^{\beta}.$$

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 1

Учебник [33] содержит почти все, что нужно знать о комплексных многообразиях и их когомологиях для понимания основной части книги. В § 2 мы изложили часть большой теории (ср. [49]), основываясь на статье Демазюра [56]. Материал §§ 4 и 5 — это приспособление к голоморфной геометрии стандартных дифференциально-геометрических понятий. Основное содержание § 3 — твисторная модель пространства Минковского. По поводу физических мотивировок твисторной программы см. в первую очередь статьи ее автора, Пенроуза, [94] и [96]. Группа Пенроуза в Оксфорде с 1976 года издает рукописные записки «Твистор Ньюслеттерс», часть которых в отредактированном виде собрана в [39]. Твисторная программа привлекла всеобщее внимание по частному поводу — ее технической эффективности в классификации инстантонов (см. главу 2 и литературные указания к ней). Сам Р. Пенроуз далеко не ограничивает ее рамки методами решения динамических уравнений. В самом деле, она подчеркивает связь пространственно-временных и спиновых степеней свободы, хорошо согласуется с идеологией конформно-инвариантной теории поля и динамического порождения масс и, наконец, с введением нечетных координат почти автоматически производит основные модели суперсимметрии и супергравитации, как будет показано в главе 5. См. также [106] и литературу, указанную в [39].

Глава 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА — ПЕНРОУЗА

В этой главе изложен ряд основных приложений когомологической техники к решению нелинейных уравнений теории поля. В § 1 описаны геометрические структуры: комплексное пространство-время, искривление которого закодировано в спинорном разложении касательного пучка; поля как сечения и связности; наконец, лагранжианы и следующие из них динамические уравнения. Читатель должен дополнить наше краткое изложение более традиционными и детальными дифференциально-геометрическими версиями: ср. [17] и весьма информативный обзор [61], а также [65]. В § 2 описано преобразование Радона — Пенроуза векторных расслоений и классов когомологий в комплексно-аналитическом варианте. Там же введены двойные расслоения, которые мы называем диаграммами автодуальности. В §§ 3 и 4 подробно изложена теорема классификации инстантонов-автодуальных связностей на S^4. Остаток главы посвящен неавтодуальным уравнениям, которые тесно связаны с теорией продолжений и препятствий к продолжению геометрических объектов с пространства на объемлющее пространство, в нашем контексте — инфинитезимальное расширение. Этот формализм описан в § 6, после введения в § 5 основного класса двойных расслоений, к которому он применяется. В § 8 содержатся вычисления вспомогательных групп когомологий. В §§ 7 и 9 изложена основная теорема о кодировании неавтодуальных уравнений Янга — Миллса в плоском случае. В §§ 10 и 11 даны с набросками доказательств некоторые дальнейшие результаты о динамических уравнениях.

§ 1. Комплексное пространство-время

1. Основные структуры. Мы будем называть *комплексным пространством-временем* четырехмерное комплексное многообразие M, на котором заданы все или часть структур из следующего списка.

а) *Грассманова спинорная структура*, т. е. два локально свободных пучка спиноров $\mathcal{S}$ (левые) и $\widetilde{\mathcal{S}}$ (правые) и спинорное разложение 1-форм σ: $\mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}} \to \Omega^1 M$. Ранги $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ по необходимости равны двум.

б) *Спинорные связности* ∇_l: $\mathcal{S} \to \mathcal{S} \otimes \Omega^1 M$ и ∇_r: $\widetilde{\mathcal{S}} \to \widetilde{\mathcal{S}} \otimes \otimes \Omega^1 M$.

в) *Спинорные метрики*: ненулевые сечения $\varepsilon \in \in H^0(M, \Lambda^2 \mathcal{S})$ и $\tilde{\varepsilon} \in H^0(M, \Lambda^2 \widetilde{\mathcal{S}})$.

Пучки $\Lambda^2 \mathcal{S}$ и $\Lambda^2 \widetilde{\mathcal{S}}$ обратимы, и сечения ε, $\tilde{\varepsilon}$ позволяют отождествить их с $\mathcal{O}_M$ там, где они не обращаются в нуль; поэтому чаще всего мы будем молчаливо предполагать это условие выполненным на всем M.

г) *Вещественная структура* ρ: $M \to M$, т. е. инволюция на множестве точек M ($\rho^2 = \mathrm{id}_M$), для которой $\rho^*(\mathcal{O}_M)$ есть пучок антиголоморфных функций. Иными словами, если (x^a) — локальная голоморфная система координат в области U, то $(\overline{\rho^*(x^a)})$ — локальная голоморфная система координат в области $\rho^{-1}(U)$, где черта означает комплексное сопряжение, примененное к значениям функций.

Нас будут интересовать лишь вещественные структуры, имеющие четырехмерное многообразие вещественных точек, т. е. неподвижных точек инволюции ρ. Сверх того, инволюция ρ будет считаться продолженной на спинорное расслоение $\mathcal{S} \oplus \widetilde{\mathcal{S}}$ и определенным образом согласованной с ε и $\tilde{\varepsilon}$. Опишем вкратце условия согласованности вообще.

2. Производные структуры и условия согласованности. Выбор спинорного разложения σ редуцирует структурную группу касательного расслоения к M с $\mathrm{GL}(4)$ до $\mathrm{GL}(2) \times \times \mathrm{GL}(2)$, а выбор ε и $\tilde{\varepsilon}$ осуществляет дальнейшую редукцию до $\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$. Мы чаще будем использовать эту редукцию в форме вложения тензорной алгебры в спинорную и соответствующего разложения тензоров. На координатном языке этому отвечает двухиндексный формализм, которым мы уже пользовались.

Спинорные ковариантные дифференциалы ∇_l и ∇_r индуцируют ковариантный дифференциал на всей спинорной алгебре и на ее тензорной подалгебре. Часто мы будем обозначать его просто ∇, не отмечая пучок-компоненту, на котором ∇ действует.

Спинорные метрики ε и $\tilde{\varepsilon}$ индуцируют метрику $g = = \varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon} \in H^0(M, \Lambda^2 \mathcal{S} \otimes \Lambda^2 \widetilde{\mathcal{S}}) \subset H^0(M, S^2(\Omega^1 M))$, где $\Lambda^2 \mathcal{S} \otimes \otimes \Lambda^2 \widetilde{\mathcal{S}}$ вложен в $S^2(\Omega^1)$ с помощью σ.

В общем случае связность ∇ не является римановой относительно этой метрики по всем возможным причинам: она может иметь кручение, может не аннулировать метрику или даже может не аннулировать никакую из метрик в конформном классе g. Требование, чтобы все или часть этих неприятностей отсутствовали,— это условие согласованности основных структур.

Согласованность вещественной структуры с остальными после выбора продолжения ρ на $\mathscr{S} \oplus \widetilde{\mathscr{S}}$ состоит в том, чтобы ρ оставляла инвариантной g. В таком случае g превратится в вещественно-аналитическую (псевдо)риманову метрику на многообразии вещественных точек M, сигнатура которой зависит от действия ρ на спинорах.

3. Координаты. Принципы обозначений те же, что в §§ 3 и 7 гл. 1. Прежде всего, (x^a), $a = 0, 1, 2, 3$,— система локальных координат, которые будут принимать вещественные значения в точках, которые неподвижны относительно ρ. Далее, w^0, w^1 — базис сечений $\mathscr{S}$; $z^{\dot 0}$, $z^{\dot 1}$ — базис сечений $\widetilde{\mathscr{S}}$. Спинорное разложение задается формулами

$$\sigma(w^\alpha \otimes z^{\dot\beta}) = e_0^{\alpha\dot\beta} dx^a.$$

Спинорные связности определяются, как в п. 1.7, символами ω, которые суть функции на M:

$$\nabla w^\alpha = \omega^\alpha_{\beta a} w^\beta \otimes dx^a, \quad \nabla z^{\dot\alpha} = \omega^{\dot\alpha}_{\dot\beta a} z^{\dot\beta} \otimes dx^a.$$

Сечения w^α, $z^{\dot\alpha}$ выбраны так, что

$$\varepsilon = 2w^0 \wedge w^1 = \varepsilon_{\alpha\beta} w^\alpha \otimes w^\beta,$$

$$\tilde\varepsilon = 2z^{\dot 0} \wedge z^{\dot 1} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} z^{\dot\alpha} \otimes z^{\dot\beta}.$$

Символы $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — те же, что в п. 1.3. Метрика имеет вид

$$g_{ab} dx^a dx^b = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta} e_a^{\alpha\dot\gamma} e_b^{\beta\dot\delta} dx^a dx^b.$$

4. Электромагнитное поле Г. Вейля. По ∇, ε и $\tilde\varepsilon$ однозначно определяются две 1-формы A и $\tilde A$ на M:

$$\nabla\varepsilon = \varepsilon \otimes A, \quad \nabla\tilde\varepsilon = \tilde\varepsilon \otimes \tilde A.$$

Их дифференциалы суть формы кривизны ∇ на $\Lambda^2\mathscr{S}$, $\Lambda^2\widetilde{\mathscr{S}}$:

$$F = dA, \quad \tilde F = d\tilde A.$$

Метрика g горизонтальна относительно ∇, если и только если $A+\widetilde{A}=0$, так как

$$\nabla(\varepsilon\otimes\widetilde{\varepsilon})=(\nabla\varepsilon)\otimes\widetilde{\varepsilon}+\varepsilon\otimes(\nabla\widetilde{\varepsilon})=(\varepsilon\otimes\widetilde{\varepsilon})\otimes(A+\widetilde{\Lambda}).$$

В координатах имеем

$$\nabla^2(w^\alpha)=\left(\partial_a w^\alpha_{\beta b}+\omega^\gamma_{\beta\,\iota}\omega^\alpha_{\gamma b}\right)w^\beta\otimes dx^a\wedge dx^b,$$

откуда

$$F=\left(\partial_a\omega^\alpha_{\alpha b}+\omega^\gamma_{\beta a}\omega^\beta_{\gamma b}\right)dx^a\wedge dx^b.$$

Аналогично

$$\nabla^2(z^{\dot\alpha})=\left(\partial_a\omega^{\dot\alpha}_{\dot\beta b}+\omega^{\dot\gamma}_{\dot\beta a}\omega^{\dot\alpha}_{\dot\gamma b}\right)z^{\dot\beta}\otimes dx^a\wedge dx^b,$$

$$\widetilde{F}=\left(\partial_a\omega^{\dot\alpha}_{\dot\alpha b}+\omega^{\dot\gamma}_{\dot\beta a}\omega^{\dot\beta}_{\dot\gamma b}\right)dx^a\wedge dx^b.$$

Замена ε на $f\varepsilon$ меняет A на $A+f^{-1}df$ и, конечно, не меняет F. Формы F и $\widetilde{F}$ являются препятствием к существованию горизонтальных спинорных метрик при данных $\mathscr{S}$, $\widetilde{\mathscr{S}}$, ∇_l, ∇_r. Форма $F+\widetilde{F}$ является препятствием к существованию горизонтальной метрики, совместимой с этими данными. Если для описания гравитационного поля выбирать связность Леви-Чивиты, то такая горизонтальная метрика должна существовать, так что с необходимостью $F+\widetilde{F}=0$. Но сама замкнутая 2-форма F не обязана быть нулевой. Она определена ГС-структурой σ и спинорной связностью ∇ с точностью до знака; знак меняется при смене ориентации.

Г. Вейль предложил в 1918 г. интерпретировать F как электромагнитное поле, встроенное в систему основных структур пространства-времени. Это была одна из первых современных попыток объединенной теории фундаментальных взаимодействий.

5. Коэффициенты Кристоффеля и кручение. Определив коэффициенты связности Γ^a_{bc} формулами $\nabla(dx^a)=\Gamma^a_{bc}dx^b\otimes\otimes dx^c$, вычислим их через σ и ω. Имеем, отождествляя Ω^1M и $\mathscr{S}\otimes\widetilde{\mathscr{S}}$ с помощью σ:

$$\nabla\left(e_c^{\alpha\dot\beta}dx^c\right)=\nabla\left(w^\alpha\otimes z^{\dot\beta}\right)=$$

$$=\omega^\alpha_{\gamma c}w^\gamma\otimes z^{\dot\beta}\otimes dx^c+\omega^{\dot\beta}_{\dot\gamma c}w^\alpha\otimes z^{\dot\gamma}\otimes dx^c=$$

$$=\omega^\alpha_{\gamma c}e_b^{\gamma\dot\beta}dx^b\otimes dx^c+\omega^{\dot\beta}_{\dot\gamma c}e_b^{\alpha\dot\gamma}dx^b\otimes dx^c,$$

или

$$e_c^{\alpha\dot\beta}\nabla\,(dx^c) = \left(-\,\partial_b e_c^{\alpha\dot\beta} + \omega^{\alpha}_{\gamma c} e_b^{\gamma\dot\beta} + \omega^{\dot\beta}_{\dot\cdot\,\dot\gamma c} e_b^{\alpha\dot\gamma}\right) dx^b \otimes dx^c.$$

Умножив обе части на $e^{a}_{\cdot\,\alpha\dot\beta} \overset{a}{=} (e^{-1})^{a}_{\cdot\,\alpha\dot\beta}$ и просуммировав по $\alpha\dot\beta$, получаем окончательно

$$\Gamma^a_{bc} = \left(-\,\partial_b e_c^{\alpha\dot\beta} + \omega^{\alpha}_{\gamma c} e_b^{\gamma\dot\beta} + \omega^{\dot\beta}_{\cdot\,\dot\gamma c} e_b^{\alpha\dot\gamma}\right) e^{a}_{\cdot\,\alpha\dot\beta}.$$

Напомним, что тензором кручения называется антисимметричная часть Γ, $t^a_{bc} = \Gamma^a_{[bc]}$, и что связность называется симметричной, если $t^a_{bc} = 0$.

Укажем инвариантное определение t, сразу показывающее его тензорный характер (в отличие от коэффициентов Γ^a_{bc}). Пусть p_s, p_a — проекторы $(\Omega^1 M)^{\otimes 2}$ на $S^2(\Omega^1 M)$ и $\Omega^2 M$ соответственно. Положим $\nabla_s = p_s \circ \nabla$, $\nabla_a = p_a \circ \nabla$, $t = \nabla_a - d$. Нетрудно убедиться, что t линеен над $\mathcal{O}_M$:

$$t(f\nu) = \nabla_a(f\nu) - d(f\nu) =$$
$$= p_a(df \otimes \nu + f\nabla\nu) - (df \wedge \nu + f\,d\nu) = ft(\nu).$$

Это и есть тензор кручения, поскольку

$$t\,(dx^a) = p_a\left(\Gamma^a_{bc} dx^b \otimes dx^c\right) = \Gamma^a_{[bc]} dx^b \otimes dx^c.$$

Теперь мы можем установить связь наших структур с классическими.

6. Предложение. а) *Предположим, что четырехмерное ГС-многообразие M со спинорными связностями удовлетворяет двум условиям:*

$$F_{ab} + \widetilde{F}_{ab} = 0, \quad \Gamma^a_{[bc]} = 0,$$

где F, $\widetilde{F}$ и Γ вычислены в пп. 5 *и* 6. *Тогда ковариантный дифференциал $\nabla\colon \Omega^1 \to \Omega^1 \otimes \Omega^1$ является связностью Леви-Чивиты. Точнее говоря, у каждой точки M найдется окрестность и в этой окрестности ненулевая голоморфная метрика g, определенная с точностью до умножения на константу, и являющаяся сечением пучка $\Lambda^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}}$, для которой ∇ будет связностью Леви-Чивиты.*

б) *Наоборот, пусть M — четырехмерное многообразие с голоморфной метрикой g. Тогда окрестность каждой точки M можно снабдить такой структурой ГС-многообразия со спинорными связностями, что g будет допускать разложение*

$\varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon}$, *а связность Леви-Чивиты будет индуцирована спинорными. Эта структура будет удовлетворять условиям первой части.*

Доказательство. Первая часть по существу уже установлена: в качестве g нужно взять локально горизонтальное сечение $\Lambda^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\tilde{\mathcal{S}}$, которое существует в окрестности любой точки. Симметричная связность, для которой g горизонтальна, обязательно будет связностью Леви-Чивиты в силу единственности последней. Заметим, что препятствием к глобальному существованию единой метрики g может быть лишь нетривиальность группы голономии; в частности, если M односвязно, g можно построить над всем M.

Для доказательства второго утверждения положим $P = P_M(\mathcal{T}M) \xrightarrow{\pi} M$. Поскольку $S^2(\Omega^1 M) = \pi_*\mathcal{O}(2)$, мы можем интерпретировать g как сечение $\mathcal{O}(2)$ на P. Пусть $F \subset P$ — нули этого сечения; разумеется, 1-коническая структура F есть структура нулевых направлений метрики g. Над каждой точкой M базой нулевого конуса является двумерная коника $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1 \subset \mathbf{C}P^3$. Поэтому g определяет двукратное голоморфное накрытие $M' \to M$: его точка над $x \in M$ есть одна из двух систем образующих базы нулевого конуса в x. Предположим, что это накрытие распадается (локально это так; глобально препятствием является «класс Штифеля» в $H^1(M, \mathbf{Z}_2)$). Тогда $F = F_l \underset{M}{\times} F_r$, где F_l и F_r — расслоения на проективные прямые над M. Рассмотрим пучок $\mathcal{T}F_l/M$. Степень его ограничения на слои равна 2, поэтому локально по M из него можно извлечь квадратный корень (глобальным препятствием снова будет некоторый класс из $H^1(M, \mathbf{Z}_2)$). Обозначим результат через $\mathcal{O}_l(1)$ и положим $\mathcal{S} = \pi_*\mathcal{O}_l(1)$. Аналогично построим $\tilde{\mathcal{S}} = \pi_*\mathcal{O}_r(1)$. Универсальное свойство грассманиана позволяет отождествить F_l, F_r с $P_M(\mathcal{S})$, $P_M(\tilde{\mathcal{S}})$ соответственно. Пусть $\mathcal{O}_F(a, b) = \mathcal{O}_l(a) \otimes \mathcal{O}_r(b)$ на F (внешнее тензорное произведение). Вложение $F = P_M(\mathcal{S}) \underset{M}{\times} P_M(\tilde{\mathcal{S}}) \subset P_M(\mathcal{T}M)$ определяется тем, что $\mathcal{O}_P(1)$ индуцирует на F пучок $\mathcal{O}_F(1, 1)$. Это дает спинорное разложение $\pi_*\mathcal{O}_P(1) = \Omega^1 M \to \pi_*\mathcal{O}_F(1, 1) = \mathcal{S} \times \tilde{\mathcal{S}}$. Далее, $\mathcal{O}_P(2)$ индуцирует пучок $\mathcal{O}_F(2, 2)$. Так как сечение $\pi^*(g)$ пучка $\mathcal{O}_P(2)$ обращается в нуль на F, $\pi^*(g)$ лежит в подгруппе сечений $\pi^*(\Lambda^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\tilde{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{O}_P(2)$. Поэтому, еще локализуя по M в случае необходимости, мы можем считать, что $g = \varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon}$.

Остается построить спинорные связности. Связность Леви-Чивиты на $\mathcal{T}M$, согласно 1.5, индуцирует связность на расслоении $P_M(\mathcal{T}M)$ и связность на пучке $\mathcal{O}(1)$ вдоль нее. Так как сечение $\pi^*(g)$ пучка $\mathcal{O}(2)$ горизонтально, это распределение касается нулей $\pi^*(g)$, т. е. F. Связность на расслоении F индуцирует связности на расслоениях F_l и F_r, потому что $\mathcal{T}F/M = \mathcal{T}F_l/M \oplus \mathcal{T}F_r/M$. Поскольку F_l и F_r — относительные проективные прямые, мы уже знаем, что связности на расслоениях достраиваются до спинорных связностей ∇_l, ∇_r. Чтобы связность $\nabla_l \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_r$ совпала с $\underline{\nabla}$, достаточно выбрать это продолжение так, чтобы $\nabla_l \varepsilon = 0$, $\nabla_r \tilde{\varepsilon} = 0$. ■

7. Комплексификация вещественно-аналитических многообразий и вещественные структуры. В § 3 гл. 1 мы уже описали стандартные вещественные структуры на большой клетке грассманиана $G(2; T^4)$, т. е. на плоском комплексном пространстве-времени. Прежде чем переносить это описание на искривленный случай, обсудим общие определения на таком уровне общности, который пригодится и в супергеометрии.

а) *Комплексификация.* Пусть M_0 есть m-мерное вещественно-аналитическое многообразие, покрытое системой координатных окрестностей U_{0j} с координатами (x_{0j}^a), $a = 1, \ldots, m$. Комплексифицируем U_{0j} до цилиндра $U_{0j} + i\mathbf{R}^m$, разрешив x_{0j}^a принимать любые комплексные значения с вещественными частями из U_{0j}. Рассмотрим далее вещественно-аналитические функции переход $x_{0j}^a = x_{0j}^a(x_{0k}^1, \ldots, x_{0k}^m)$ для всевозможных пар j, k с $U_{0j} \cap U_{0k} \neq \varnothing$. Степенные ряды, представляющие эти функции, сходятся в некоторой окрестности $U_{0j} \cap U_{0k}$ в ее комплексификации. Поэтому, предполагая, что покрытие (U_{0j}) локально-конечно, мы можем выбрать такие комплексные области $U_j \supset U_{0j}$, что на $U_k \cap U_j$ функции перехода существуют и удовлетворяют стандартным условиям. Пусть $M \supset M_0$ — склеенное из этих областей комплексно аналитическое многообразие. Оно называется комплексификацией M. Из-за произволов конструкции комплексификация не определена однозначно, но у двух комплексификаций есть окрестности M_0, на которых тождественный изоморфизм M_0 индуцирован единственным изоморфизмом этих окрестностей. Если угодно, корректно и функториально по M_0 определен росток комплексификации.

На цилиндрах $U_{0j} + i\mathbf{R}^m$ определено комплексное сопряжение. Оно индуцирует антиголоморфную инволюцию на комплексификации $\rho: M \to M$, не зависящую от произволов конструкции. M_0 восстанавливается по (M, ρ) как множество неподвижных точек этой инволюции. Пучок $\rho^*(\mathcal{O}_M)$ состоит из ростков антиголоморфных функций, и $\overline{\rho^*(\mathcal{O}_M)} = \mathcal{O}_M$. Отображение $f \mapsto f : f^\rho(x) = \overline{f(\rho(x))}$ есть антиголоморфная инволюция на $\mathcal{O}_M$, продолжающая ρ. Для вещественных координат имеем $\left(x_{0j}^a\right)^\rho = x_{0j}^a$. Чтобы применить ρ к степенному ряду от $x_{0j}^a - c_{0j}^a$, нужно применить комплексное сопряжение к коэффициентам ряда и начальной точке c_{0j}^a. На M_0 функции $\bar{f}$ и f^ρ совпадают, но обозначение $\bar{f}$ в общем случае двусмысленно — его можно принять за комплексное сопряжение значений.

Когда в лагранжиане квантовой теории поля фигурирует комплексное поле вместе ψ с его сопряжённым $\bar{\psi}$, то правильное голоморфное продолжение этого лагранжиана состоит в замене $\bar{\psi}$ на ψ^ρ.

б) *Вещественная структура.* Вещественной структурой на комплексном многообразии M называется антиголоморфная инволюция $\rho: M \to M$ и ее продолжение $f \mapsto f^\rho$ на $\mathcal{O}_M$ со свойством $f^\rho(x) = \overline{f(\rho(x))}$. Не всякая пара (M, ρ) может быть представлена в виде комплексификации вещественно аналитического многообразия из-за недостаточного количества или полного отсутствия вещественных (неподвижных относительно ρ) точек: см. п. 1.3 и ниже.

в) *Вещественная и кватернионная структуры на пучке.* Пусть $\mathcal{E}$ — когерентный пучок на M, ρ — вещественная структура. Антилинейное отображение $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$: $e \mapsto e^\rho$, продолжающее ρ на M и $\mathcal{O}_M$ (в частности, $(fe)^\rho = f^\rho e^\rho$), может существовать, если только $\mathcal{E}$ и $\overline{\rho^*(\mathcal{E})}$ изоморфны. Такое отображение со свойством $(e^\rho)^\rho = e$ называется вещественной структурой на $\mathcal{E}$; если же $(e^\rho)^\rho = -e$, то оно называется кватернионной структурой. Последнее название связано с тем, что на $\mathcal{E}$ можно определить действие слева тела кватернионов $\mathbf{C}[j]$ формулой $je = e^\rho$. Действие ρ переносится на тензорную алгебру по правилу $(e_1 \otimes e_2)^\rho = e_1{}^\rho \otimes e_2{}^\rho$.

г) *Комплексификация метрики.* Пусть g_0 — вещественно-аналитическая псевдориманова метрика на M_0. Ее коэффициенты в координатах $\left(x_{0j}^a\right)$ сходятся в некоторой окрестности M_0. Поэтому достаточно малая комплексификация M_0 снабжена голоморфной метрикой g, продолжающей g_0. Очевидно, $g^\rho = g$. Наоборот, любая ρ-инвариантная голоморфная метрика на комплексификации (M, ρ) индуцирует вещественную псевдориманову метрику на M_0.

В качестве примера и подготовки к дальнейшему классифицируем вещественные структуры на $\mathbf{C}P^1$ и $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$. Пусть $S = \mathbf{C}^2$. Рассмотрим два антиголоморфных отображения: $S \to S$, $\rho(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ и $j(z_1, z_2) = (-\bar{z}_2, \bar{z}_1)$ (ср. п. 1.3). Обе индуцируют на $\mathbf{C}P^1 = P(S)$ — вещественные структуры. Относительно первой $\mathbf{C}P^1$ становится комплексификацией $\mathbf{R}P^1$; в ней $\mathcal{O}(1)$ также снабжен вещественной структурой.

Относительно второй $\mathbf{C}P^1$ не имеет неподвижных точек; $\mathcal{O}(1)$ снабжен кватернионной структурой.

8. Лемма. а) *Любая вещественная структура на $\mathbf{C}P^1$ изоморфна одной из двух описанных.*

б) *Любая вещественная структура на $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ изоморфна либо прямому произведению вещественных структур на сомножителях; либо имеет вид $\rho(x, y) = (\tau^{-1}(y), \tau^{-1}(x))$, где $\tau : \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^1$ — антиголоморфный изоморфизм. В этом случае $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ есть комплексификация графика τ.*

Доказательство. а) Пусть ρ — антиголоморфная инволюция на $\mathbf{C}P^1$. Выберем неинвариантную относительно ρ точку 0, положим $\rho(0) = \infty$ и построим мероморфную на $\mathbf{C}P^1$ функцию w с нулем и полюсом первого порядка в 0 и ∞ соответственно. Тогда $w^\rho = aw^{-1}$. Из $w^{\rho^2} = w$ следует, что $\bar{a} = a$. Замена w на bw меняет a на $|b|^2 a$. Поэтому можно считать, что $a = 1$ или -1. Эти два случая и отвечают двум описанным структурам.

б) Пусть ρ — антиголоморфная инволюция $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$. Действуя на группу Пикара, она либо оставляет на месте классы двух стандартных образующих $\mathcal{O}(1, 0)$ и $\mathcal{O}(0, 1)$, либо меняет их местами. В первом случае ρ разлагается в прямое произведение. Во втором случае мероморфная функция w_l с одним нулем и одним полюсом на первом сомножителе после подъема на $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ и применения ρ превращается в аналогичную функцию w_ρ, поднятую со второго сомножителя. Отображение на точках τ: $w_l^0 \mapsto \overline{w}_r^0$ (нулик символизирует значение функции) обладает требуемым свойством. ■

9. **Применение к пространству-времени.** Пусть M_0 — вещественно-аналитическое четырехмерное многообразие с (псевдо)римановой метрикой g_0, (M, ρ, g) — комплексификация этой структуры, $F \xrightarrow{\pi} M$ — пространство нулевых направлений, как в п. 6. Разумеется, ρ индуцирует инволюцию на

F и на относительной комплексной квадрике $\pi^{-1}(M)$. Над каждой точкой M_0, таким образом, мы имеем базу конуса комплексных нулевых направлений с вещественной структурой, тип которой зависит от сигнатуры метрики g_0. Нас интересуют только два случая.

а) *Сигнатура Лоренца.* Эта сигнатура отвечает второму типу б) леммы 8 — это единственный случай, когда вещественный небосвод является сферой, в остальных случаях он либо пустой, либо является тором $\mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}P^1$.

б) *Сигнатура Римана.* Эта сигнатура отвечает прямому произведению двух $\mathbf{C}P^1$ без вещественных точек.

В соответствии с этим мы будем рассматривать вещественные структуры на комплексном пространстве-времени, которые продолжены на спинорные расслоения так, что в каждой вещественной точке получается одна из этих двух картин.

10. Инволюция в координатах; случай Лоренца. Координаты x^a вещественны, ρ определяет антилинейные изоморфизмы $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$, откуда вещественная структура на пучке $\mathcal{S} \oplus \widetilde{\mathcal{S}}$; инвариантные сечения называются спинорами Майораны. Выберем базисы сечений так, что $(w^{\alpha})^{\rho} = z^{\dot\alpha}$, $(z^{\dot\alpha})^{\rho} = w^{\alpha}$. Вещественность структуры означает, что

$$e^{a}_{\alpha\dot\beta} w^{\alpha} \otimes z^{\dot\beta} = \left(e^{a}_{\alpha\dot\beta} w^{\alpha} \otimes z^{\dot\beta}\right)^{\rho} = \left(e^{a}_{\alpha\dot\beta}\right)^{\rho} w^{\beta} \otimes z^{\dot\alpha},$$

т. е. $(e^{a})^{\rho} = (e^{a})^{t}$, t — транспонирование. Поэтому в вещественных точках e^{a} являются эрмитовыми матрицами.

11. Инволюция в координатах; случай Римана. Координаты x^a вещественны; $(w^{\alpha})^{\rho} = \varepsilon_{\alpha\beta} w^{\beta}$ и аналогично для $z^{\dot\alpha}$ Вещественность e означает, что

$$\left(e^{a}_{\alpha\dot\beta}\right)^{\rho} = \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\dot\beta\dot\delta} e^{a}_{\gamma\dot\delta}$$

как в п. 1.3.

12. Согласованность с остальными структурами. Мы требуем, чтобы в случае Минковского $\varepsilon^{\rho} = \tilde{\varepsilon}$, в случае Евклида $\varepsilon^{\rho} = \varepsilon$, $\tilde{\varepsilon}^{\rho} = \tilde{\varepsilon}$. Далее, спинорные связности должны быть согласованными с ρ. В случае Минковского это условие $\nabla(w^{\alpha})^{\rho} = (\nabla w^{\alpha})^{\rho}$ переписывается в виде

$$\left(\omega^{\alpha}_{\beta a}\right)^{\rho} = \omega^{\dot\alpha}_{\dot\beta a}, \quad \left(\omega^{\dot\alpha}_{\dot\beta a}\right)^{\rho} = \omega^{\alpha}_{\beta a}.$$

В частности, на «вещественном сечении» M_0 добавление или устранение точки в спинорных индексах коэффициентов связности равносильно комплексному сопряжению. Из формул п. 4 видно, что $\bar{F} = F^\rho$. Поэтому на вещественной части электромагнитное поле Вейля должно быть чисто мнимым, чтобы допускать симметричную риманову связность. Это согласуется с его квантовой ролью, обеспечивающей вращение фазового множителя в $U(1)$-расслоении электрического заряда.

В случае римановой метрики условия вещественности приобретают вид

$$(\omega^\alpha_{\beta a})^\rho = \varepsilon^{\gamma\beta}\varepsilon_{\alpha\delta}\omega^\delta_{\gamma a}, \qquad \left(\omega^{\dot\alpha}_{\dot\beta a}\right)^\rho = \varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\delta}\,\omega^{\dot\delta}_{\dot\gamma a}.$$

13. Автодуальные и антиавтодуальные 2-формы. Из разложения

$$\Omega^2 M = S^2\mathcal{S} \otimes \Lambda^2\widetilde{\mathcal{S}} \oplus \Lambda^2\mathcal{S} \otimes S^2\widetilde{\mathcal{S}}$$

очевидно, что при сигнатуре Минковского $(\Omega^2_\pm M)^\rho = \Omega^2_\mp M$. Поэтому вещественная ($\rho$-инвариантная) связность на пучке с вещественной структурой не может иметь автодуальную (или антиавтодуальную) форму кривизны. В частности, само ГС-многообразие не может быть одновременно полуплоским и иметь согласованную вещественную структуру с сигнатурой Минковского.

Напротив, для сигнатуры Римана $(\Omega^2_\pm M)^\rho = \Omega^2_\pm M$. Точнее, кватернионная структура на $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$ индуцирует вещественную структуру на $\Omega^2_\pm M$. Полуплоские ГС-многообразия и автодуальные пучки Янга — Миллса на них с римановой вещественной структурой существуют и представляют значительный интерес.

14. Поля, лагранжианы и динамические уравнения. Классические поля на пространстве-времени M — это либо сечения расслоений над M, либо связности на этих расслоениях. По набору полей (Ψ) данной физической модели строится ее лагранжиан — форма объема на M, зависящая от компонент Ψ и их производных. Уравнения Эйлера — Лагранжа — это динамические уравнения для полей. При геометрическом изложении теории поля могут определяться инвариантно, однако для записи динамических уравнений нужно выбрать «функциональные координаты» Ψ описываемой геометрической картины, чтобы имели смысл вариации $\delta\Psi$; если имеется несколько естественных выборов, то получается запись теории в разных формализмах. Например, кроме обычного задания гравитационного поля метрикой g_{ab}, возможно задание его тетрадой $\left(e_a^m dx^a\right)$ ортонормированных 1-форм, или задание тетрадой и связностью и т. п. Решения динамических уравнений, т. е. реализации стационарных точек функционала действия, будут одними и теми же геометрически, но квантовые флуктуации на фоне этих решений уже могут по существу отличаться в разных формализмах, и выбор между ними потребует привлечения физических соображений. Перечислим некоторые основные поля и их вклады в лагранжиан.

15. Гравитационное поле. Будем описывать его здесь метрикой g на M. По метрике строится стандартная форма объема $v = \sqrt{|\det g|}\, d^4x$ в обычных обозначениях (чисто алгебраически строится ее квадрат: ср. ниже § 7 гл. 4). Все лагранжианы, вводимые ниже, имеют вид $L(\Psi)v$, где L — плотность лагранжиана, т. е. функция от полей и их производных, принимающая значения в функциях на M,— скаляр в физической терминологии.

Плотность лагранжиана самого гравитационного поля, согласно Гильберту — Эйнштейну, есть скалярная кривизна R (точнее,— $\varkappa R$, где $\varkappa$ — константа; обычно мы будем опускать упоминание о константах, связанное с выбором единиц, а также измерением постоянных взаимодействия, зарядов и т. п.). Напомним, что если кривизна связности Леви-Чивиты ∇^2: $\Omega^1 M \to \Omega^1 M \otimes \Omega^2 M$ есть $\nabla^2 (dx^a) = R^a_{bcd} dx^b \otimes dx^c \otimes \otimes dx^d$, то тензор Риччи равен $R_{ik} = R^a_{iak}$, а скалярная кривизна $R = R^i_i$. Динамические уравнения для гравитационного поля в пустоте (без источников) имеют вид $G = 0$, где $G = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}$ — тензор Эйнштейна, или, что эквивалентно, вид

$$\mathrm{Ric}^0 = 0, \quad R = 0,$$

где Ric^0 — бесследная часть тензора Риччи, $\mathrm{Ric}^0_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik}$.

На языке спинорного разложения тензоры R_{ik} и R естественно интерпретируются как компоненты кривизны, связанные с разложением $\nabla = \nabla_l \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_r$. В частности, кривизна Φ_l связности ∇_l имеет левую и правую компоненты: $\Phi_l = \Phi_{ll} + \Phi_{lr}$, и аналогично, $\Phi_r = \Phi_{rl} + \Phi_{rr}$. Уравнение $\mathrm{Ric}^0 = 0$ эквивалентно любому из двух условий автодуальности спинорных связностей: $\Phi_{lr} = 0$ или $\Phi_{rl} = 0$. В частности, если связность ∇_l (∇_r) является плоской и вдобавок скалярная кривизна R обращается в нуль, то M удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна. (В этом обсуждении подразумевается, что ∇_l, ∇_r вместе индуцируют связность Леви-Чивиты.)

Если совокупность основных полей содержит еще какие-нибудь поля Ψ, кроме гравитационного, то динамические уравнения для гравитационного поля принимают вид $G = T(\Psi)$, где $T = T_{ik}$ называется тензором энергии-импульса полей Ψ. Тензор энергии-импульса служит «источником» гравитационного поля, но и в отсутствие источников последнее может быть нетривиальным.

16. Электромагнитное поле. Мы будем рассматривать электромагнитное поле как связность ∇ на одномерном векторном расслоении $\mathcal{E}$ над пространством-временем M. Локальный выбор базиса $\mathcal{E}$ позволяет задать ковариантный дифференциал ∇: $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1$ посредством 1-формы потенциалов $A_m dx^m$; смена базиса меняет форму на калибровочно эквивалентную. Поскольку $\mathcal{E}nd\mathcal{E}$ канонически отождествляется с $\mathcal{O}_M$, кривизна связности в этом случае есть просто 2-форма напряженностей $\Phi(\nabla) = \Phi_{ab}dx^a \wedge dx^b$, $\Phi_{ab} = \partial A_b/\partial x^a - \partial A_a/\partial x^b$. Вклад электромагнитного поля в плотность лагранжиана есть $(\Phi(\nabla), \Phi(\nabla))$: здесь подразумевается произведение на $\Omega^2 M$, индуцированное метрикой. Чаще лагранжиан переписывают в терминах операции Ходжа «звездочка»: $*$: $\Omega^i M \to \Omega^{4-i} M$, которая определяется формулой $(\Phi_1, \Phi_2)v = \Phi_1 \wedge * \Phi_2$. Обе записи несколько затемняют то обстоятельство, что $(\Phi(\nabla), \Phi(\nabla))$ зависит от метрики и потому, строго говоря, описывает электромагнитное поле не само по себе, а в его взаимодействии с гравитационным. Уравнения Максвелла «в пустоте» имеют вид

$$\begin{cases} d\Phi = 0 & \text{(тождество Бьянки)}, \\ d{*}\Phi = 0. \end{cases}$$

Как обычно, разложение Φ на автодуальную и антиавтодуальную части, $\Phi = \Phi_l + \Phi_r$, позволяет написать уравнения $\Phi_{l,\,r} = 0$, из которых следуют уравнения Максвелла. В присутствии заряженных полей Ψ второе уравнение Максвелла принимает вид $d * \Phi = J$, где $J = J(\Psi)$ — 3-форма аксиального тока.

17. Поле Янга — Миллса. Формально отличие поля Янга — Миллса от поля Максвелла состоит в том, что оно представляет собой связность ∇ на векторном расслоении $\mathcal{E}$ ранга, большего единицы. Форма кривизны $\Phi(\nabla)$ является сечением $\mathscr{E}nd\mathscr{E}\otimes\Omega^2 M$. Вклад в плотность лагранжиана по-прежнему имеет вид $(\Phi(\nabla), \Phi(\nabla))$, только скалярное произведение учитывает каноническое скалярное произведение на $\mathscr{E}nd\mathscr{E}$ вида $\operatorname{tr}(ab)$. Уравнения имеют вид $\widetilde{\nabla}\Phi=0$ (тождество Бьянки) и $\widetilde{\nabla}(*\Phi)=0$, где $\widetilde{\nabla}$ — распространение ∇ на $\mathscr{E}nd\mathscr{E}\otimes\Omega\cdot M$. В присутствии источников второе уравнение принимает вид $\widetilde{\nabla}(*\Phi)=J(\Psi)$. В отличие от поля Максвелла, классические поля Янга — Миллса неизвестны.

18. **Поля материи спина нуль.** Поле материи спина нуль — это сечение расслоения $\mathscr{E}$, на котором задана связность ∇. Вклад поля материи в плотность лагранжиана может состоять из членов двух типов: потенциала $V(\Psi)$, часто полинома от координат Ψ, и кинетического члена $(\nabla\Psi, \nabla\Psi)$. Последний описывает взаимодействие Ψ одновременно с полем связности и с гравитационным полем.

19. **Поля материи спина** $^1/_2$. Поля материи спина $^1/_2$ — это сечения расслоения $\mathscr{E}\otimes(\mathscr{S}\oplus\widetilde{\mathscr{S}})$. Массовый член в лагранжиане пропорционален (Ψ^ρ, Ψ), где скалярное произведение сконструировано из метрики на $\mathscr{E}$ и спинорных метрик. Кинетический член пропорционален $\operatorname{Re}(\Psi^\rho, D\Psi)$, где D — оператор Дирака: композиция ковариантного дифференциала $\mathscr{E}\otimes(\mathscr{S}\oplus\widetilde{\mathscr{S}})\to\mathscr{E}\otimes(\mathscr{S}\oplus\widetilde{\mathscr{S}})\otimes\Omega^1 M$ и свертки $(\mathscr{S}\oplus\widetilde{\mathscr{S}})\otimes\Omega^1 M\to\widetilde{\mathscr{S}}\oplus\mathscr{S}$.

Мы не будем здесь описывать лагранжианы для полей материи с высшими спинами. Отметим лишь, что в моделях супергравитации существенную роль играет лагранжиан Рариты — Швингера для поля материи спина $^3/_2$ (ср. § 7 гл. 5).

§ 2. Диаграмма автодуальности и преобразование Радона — Пенроуза

1. **Преобразование Радона — Пенроуза.** Рассмотрим диаграмму $Z\xleftarrow{\pi_1}F\xrightarrow{\pi_2}M$, где π_1, π_2 — субмерсивные морфизмы многообразий. Под преобразованием Радона — Пенроуза в широком смысле слова мы будем понимать перенос различных геометрических объектов с базы Z на базу M и, наоборот, с M на Z посредством подъема на F и последующего спуска. Простейший пример: пусть ω — форма на Z, размерность которой равна размерности слоев π_2, и пусть слои π_2 компактны. Тогда подъем ω на F есть обычный прообраз $\pi_1^*(\omega)$, а его спуск на M — функция на M, яв-

ляющаяся результатом интегрирования $\pi_1^*(\omega)$ вдоль слоев π_2. Один из вариантов классического преобразования Радона представляется в таком виде очевидным способом: Z — проективное пространство, M — грассманиан k-подпространств в нем, а F — график отношения инцидентности.

Многообразия Z, F, M, образующие двойное расслоение, и геометрические объекты, переносимые по стрелкам и против них, могут принадлежать различным геометрическим категориям. Мы работаем с комплексно-аналитическими объектами, и одна из важнейших конструкций для нас — перенос локально свободного пучка с Z на M. Опишем типичную ситуацию.

Пусть слои π_2 компактны и связны. Назовем локально свободный пучок $\mathscr{E}_Z$ на Z M-тривиальным, если ограничения $\pi_1^*(\mathscr{E}_Z)$ на все слои π_2 свободны. Положим $\mathscr{N} = \operatorname{Ker}(\mathrm{res}\colon \pi_2^*\Omega^1 M \to \Omega^1 F/Z)$, где res — ограничение на векторные поля, касательные к слоям π_1. Предположим, что $\pi_{2*}\mathscr{N} = 0$ и $R^1\pi_{2*}\mathscr{N} = 0$.

2. **Предложение.** *В описанных условиях можно определить функтор:*

(M-тривиальные пучки на Z) $\to$ (пучки со связностью на M), $\mathscr{E}_Z \mapsto (\mathscr{E}, \nabla)$, *где* $\mathscr{E} = \pi_{2*}\pi_1^*(\mathscr{E}_Z)$, $\nabla = \pi_{2*}(\nabla_{F/Z})$, *где* $\nabla_{F/Z}$: $\pi_1^*(\mathscr{E}) \to \pi_1^*(\mathscr{E}) \otimes \Omega^1 F/Z$ *— относительная связность, аннулирующая подпучок* $\pi_1^{-1}(\mathscr{E}) \subset \pi_1^*(\mathscr{E})$.

Доказательство. Из M-тривиальности $\mathscr{E}_Z$ и связности и компактности слоев π_2 следует, что имеет место канонический изоморфизм $\pi_2^*\mathscr{E} = \pi_1^*\mathscr{E}_Z$. Обозначим этот пучок через $\mathscr{E}_F$. Из $\pi_{2*}\mathscr{N} = 0 = R^1\pi_{2*}\mathscr{N}$ следует, что $\pi_{2*}(\mathrm{res})$: $\Omega^1 M \to \pi_{2*}\Omega^1 F/Z$ является изоморфизмом. Поэтому $\pi_{2*}(\mathscr{E}_F \otimes \Omega^1 F/Z)$ канонически отождествляется с $\mathscr{E} \otimes \Omega^1 M$, и спуск диаграммы $\nabla_{F/Z}$: $\mathscr{E}_F \to \mathscr{E}_F \otimes \Omega^1 F/Z$ является дифференциальным оператором первого порядка ∇: $\mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \Omega^1 M$. Из определений немедленно следует, что это связность. Все конструкции, очевидно, функториальны. ■

Попытка обратить эту конструкцию наталкивается на некоторое препятствие. Пусть $(\mathscr{E}, \nabla)$ — пучок со связностью на M. Положим $\mathscr{E}_F = \pi_2^*(\mathscr{E})$ и обозначим через $\nabla_{F/Z}$ композицию

$$\nabla_{F/Z}\colon \mathscr{E}_F \xrightarrow{\pi_2^*(\nabla)} \mathscr{E}_F \otimes \pi_2^*\Omega^1 M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{res}} \mathscr{E}_F \otimes \Omega^1 F/Z,$$

Пусть $\mathscr{E}'_F = \operatorname{Ker}\nabla_{F/Z}$. Это пучок систем локальных коэффициентов вдоль слоев π_1. В принципе связность ∇ может иметь нетривиальную кривизну или монодромию вдоль слоев π_1. Однако если слои π_1 связны, а кривизна и монодромия ∇ вдоль них тривиальны, то пучок $\mathscr{E}_Z = \pi_{2*}(\mathscr{E}'_F)$ локально свободен на Z и имеет тот же ранг, что и $\mathscr{E}$. Комбинируя описанные две конструкции, получаем следующий общий результат.

3. **Теорема.** *Если слои π_1 связны, а слои π_2 компактны и связны, и $\pi_{2*}\mathscr{N} = 0 = R^1\pi_{2*}\mathscr{N}$, то прямое и обратное преобразования Радона — Пенроуза устанавливают квазиобратные эквивалентности следующих категорий:*

а) *Категория M-тривиальных локально свободных пучков на Z.*

б) *Категория пар $(\mathscr{E}, \nabla)$, где $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на M, ∇ — связность на нем с тривиальной кривизной и монодромией вдоль слоев π_1.* ■

Формальное доказательство того, что соответствие между $\mathscr{E}_Z$ и $(\mathscr{E}_F, \nabla_{F/Z})$ является эквивалентностью категорий, опирается на теорему Делиня ([55], стр. 14, теорема 2.23), к которой мы отсылаем читателя.

Если пучок $\mathscr{E}_Z$ не является M-тривиальным, то спуск диаграммы $\nabla_{F/Z}$: $\pi_1^*\mathscr{E} \to \pi_1^*\mathscr{E}_Z \otimes \Omega^1 F/Z$ не будет связностью, да и пучок $\pi_1^*\mathscr{E}$, вообще говоря, не восстанавливается по $\pi_{2*}\pi_1^*\mathscr{E}$. Правильная общая точка зрения на ситуацию в этом случае такова. Относительный комплекс де Рама

$$\pi_1^*\mathscr{E}_Z \to \pi_1^*\mathscr{E}_Z \otimes \Omega^1 F/Z \to \pi_1^*\mathscr{E}_Z \otimes \Omega^2 F/Z \to \dots$$

является резольвентой $\pi_1^{-1}(\mathscr{E}_Z)$, т. е. он квазиизоморфен $\pi_1^{-1}(\mathscr{E}_Z)$. Поэтому естественный прямой образ $\pi_1^{-1}(\mathscr{E}_Z)$ лежит в производной категории пучков C-пространств на M и изоморфен $R\pi_{2*}(\pi_1^*\mathscr{E}_Z \otimes \Omega^\cdot F/Z)$. Основные вычислимые инварианты этого прямого образа суть пучки относительных гиперкогомологий $R^i\pi_{2*}(\pi_1^*\mathscr{E}_Z \otimes \otimes \Omega^\cdot F/Z)$, а также члены и дифференциалы спектральных последовательностей, сходящихся к этим пучкам. В конкретных ситуациях, с которыми мы встретимся ниже, эти дифференциалы окажутся естественными операторами, возникающими в динамических уравнениях теории поля на пространстве-времени M: Клейна — Гордона, Дирака и т. п.

Здесь мы докажем один технический результат, полезный при когомологических вычислениях.

4. **Предложение.** *Пусть* $\pi\colon F\to G$ — *субмерсия комплексных многообразий,* $\mathscr{E}$ — *локально свободный пучок на* G. *Предположим, что слои* π *связны и* $H^i(\pi^{-1}(x),\ \mathbf{C})=0$ *при* $1\leqslant i\leqslant p$. *Тогда естественное отображение* $H^i(G,\ \mathscr{E})\to\to H^i(F,\ \pi^{-1}(\mathscr{E}))$ *является изоморфизмом при* $0\leqslant i\leqslant p$ *и мономорфизмом при* $i=p+1$.

5. **Лемма.** *В условиях предложения пусть* $\mathcal{O}_{\infty,G}$ — *пучок гладких комплексных функций на* G, $\mathscr{F}_\infty$ — *локально свободный пучок* $\mathcal{O}_{\infty,G}$*-модулей. Тогда* $H^i(\mathscr{F},\ \pi^{-1}(\mathscr{F}_\infty))=0$ *при* $1\leqslant i\leqslant p$.

Вывод предложения из леммы. Рассмотрим резольвенту Дольбо $0\to\mathscr{E}_\infty\to\Omega_\infty^{0,\cdot}G\otimes\mathscr{E}_\infty$ на G, где $\mathscr{E}_\infty=\mathscr{E}\otimes\mathcal{O}_{\infty,G}$, и поднимем ее на F. Известно, что к $H^\cdot(F,\ \pi^{-1}(\mathscr{E}))$ сходится спектральная последовательность с $E_2^{ij}=H^i\left(H^j\left(F,\ \pi^{-1}\left(\Omega_\infty^{0,\cdot}\otimes\mathscr{E}_\infty\right)\right)\right)$. Из леммы 5 следует, что $H^j(F,\ \pi^{-1}(\Omega_\infty^{0,\cdot}\otimes\mathscr{E}_\infty))=0$ при $1\leqslant j\leqslant p$. Следовательно, $H^i\left(F,\ \pi^{-1}(\mathscr{E})\right)=H^i\left(\Gamma\left(F,\ \pi^{-1}\left(\Omega_\infty^{0,\cdot}G\otimes\mathscr{E}_\infty\right)\right)=H^i\left(\Gamma\left(G,\ \Omega_\infty^{0,\cdot}G\otimes\mathscr{E}_\infty\right)\right)$ при $0\leqslant i\leqslant p$ (второе равенство следует из связности слоев π). Но последняя группа когомологий совпадает с $H^i(G,\ \mathscr{E}_\infty)$. Очевидно, при $i==p+1$ эта спектральная последовательность все еще позволяет убедиться, что $H^{p+1}(G,\ \mathscr{E})\to H^{p+1}(F,\ \pi^{-1}(\mathscr{E}))$ есть мономорфизм.

Доказательство леммы. Мы покажем, что если $H^{i-1}(\pi^{-1}(x),\ \mathbf{C})=H^i(\pi^{-1}(x),\ \mathbf{C})=0$, то $H^i(F,\ \pi^{-1}(\mathscr{F}))=0$ (при $i=1$ условие на H^0 следует заменить связностью слоя).

Основной момент — существование такого открытого покрытия $F=\bigcup\limits_{a=1}^{\infty}F_a$, что $F_a\Subset F_{a+1}$ и отображения $r^j_{a+1,a}\colon H^j(F_{a+1},\ \pi^{-1}(\mathscr{F}))\to H^j(F_a,\ \pi^{-1}(\mathscr{F}))$ являются нулевыми при $j=i-1,\ i$ (если $j=0$, вместо этого мы требуем связности F_a). Предположим, что такое покрытие построено. Пусть ω — некоторый класс когомологий из $H^i(F,\ \pi^{-1}(\mathscr{F}_\infty))$. Очевидно, его можно представить $(0,\ i)$-формой в относительном комплексе Дольбо $\Omega_\infty^{0,\cdot}F\otimes\pi_\infty^*(\mathscr{F}_\infty)$. Обозначим эту форму также ω. Мы хотим решить уравнение $\omega=d_{F/G}\nu$ в комплексе Дольбо. С этой целью построим решения $\omega|F_a=d_{F/G}\nu_a$, которые существуют благодаря тому, что $r^i_{a+1,a}=0$. После этого будем менять ν_a на кограницу с помощью срезающих функций, чтобы добиться существования предела $\nu = \lim \nu_a$, $\omega = d_{F/G}\nu$. Это можно сделать благодаря условию $r^{i-1}_{a+1,a} = 0$.

Будем теперь строить покрытие (F_a). Фиксируем точку $x \in G$ и компакт $K \Subset F$. Из $H^i(\pi^{-1}(x), \mathbf{C}) = 0$ следует существование таких открытых подмножеств U, V в слое $\pi^{-1}(x)$, что $\pi^{-1}(x) \cap K \Subset U \Subset V \subset \pi^{-1}(x)$ и отображение ограничения $H^i(V, \mathbf{C}) \to H^i(U, \mathbf{C})$ нулевое. Для их построения следует взять локально конечное открытое покрытие $\pi^{-1}(x)$ относительно компактными открытыми множествами, любое конечное пересечение которых стягиваемо. После этого U и V можно считать конечными объединениями элементов такого покрытия.

Существуют такие окрестности $W \ni x$ и $\tilde{U} \supset U$ в F, что $\tilde{U}$ диффеоморфна $V \times W$ (проекция $\pi|\tilde{U}$ есть проекция на W). Покроем $V \times W$ открытыми множествами вида $S \times W$, где S — построенное ранее для определения V покрытие. Когомологии $H^{\bullet}(\tilde{U}, \pi^{-1}(\mathcal{F}))$ можно вычислять в этом покрытии, пользуясь спектральной последовательностью Лерэ. Пользуясь этим, нетрудно убедиться, что $H^i(V \times W, \pi^{-1}(\mathcal{F})) \to H^i(U \times W, \pi^{-1}(\mathcal{F}))$ — нулевое отображение, поскольку это так над каждой точкой $x \in W$. Отсюда вытекает существование открытых множеств U', V' в F со свойствами: $K \Subset U' \Subset V' \Subset F$, отображение $H^i(V', \pi^{-1}(\mathcal{F})) \to H^i(U', \pi^{-1}(\mathcal{F}))$ нулевое. Поэтому исчерпывающее покрытие (F_a) можно строить индукцией по a. ■

6. Диаграмма автодуальности. До сих пор мы считали, что двойное расслоение $Z \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$ уже задано. Однако при определенных предположениях оно естественно строится по M или по Z и по дополнительным структурам на этих многообразиях. В частности, Пенроуз в своей конструкции «нелинейных гравитонов» предложил по автодуальному четырехмерному ГС-многообразию M построить его «пространство твисторов Z», параметризующее геодезические поверхности в M, и открыл, как реконструировать M по Z. Мы зададим соответствующий класс диаграмм аксиоматически и покажем, как восстанавливать одно из базовых пространств по другому в разных ситуациях. Переход от M к Z и обратно естественно рассматривать как некоторое нелинейное преобразование Радона — Пенроуза, в отличие от описанного выше «послойного интегрирования» расслоений или дифференциальных форм, которое в существенном является линейной операцией.

Будем называть *диаграммой автодуальности* двойное расслоение $Z \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$ со следующими свойствами:

а) Размерности Z, F, M равны соответственно 3, 5, 4.

б) F/M — относительная проективная прямая: $F = P_M(\mathscr{S}^*)$, где $\mathscr{S}^*$ — локально свободный пучок ранга два на M.

в) Слои π_1 трансверсальны к слоям π_2. Точнее говоря, $d\pi_2\colon \mathscr{T}F/Z \to \pi_2^*\mathscr{T}M$ является локально прямым вложением, и соответствующий морфизм $i\colon F \to G_M(2;\ \mathscr{T}M)$ является замкнутым вложением.

Вещественной структурой на диаграмме автодуальности мы будем называть такой набор вещественных структур на M, F, Z, относительно которого π_1 и π_2 вещественны, M имеет четырехмерное подмногообразие вещественных точек, а на $\mathscr{S}^*$ имеется кватернионная структура, индуцирующая данную вещественную структуру на F.

Опишем несколько геометрических ситуаций, естественно приводящих к диаграммам автодуальности.

7. Автодуальные ГС-многообразия. Изученные в § 7 гл. 1 грассмановы спиноры приводят к диаграмме автодуальности в следующих предположениях: $\dim M = 4$, спинорные расслоения на M имеют ранг 2 и интегрируемая коническая связность h на стандартной 2-конической структуре $F \xrightarrow{\pi_2} M$ интегрируема до расслоения $F \xrightarrow{\pi_1} Z$. Тогда двойное расслоение $Z \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$ является диаграммой автодуальности.

Проверим условия приложимости к ней теоремы 3. Слои π_2 компактны и связны. Связность слоев π_1 — это отдельное условие. Для плоской диаграммы автодуальности $P(T) \xleftarrow{\pi_1} F(1,2;\ T) \xrightarrow{\pi_2} G(2;\ T)$, $T = \mathbf{C}^4$, слои π_1 при вложении Плюккера $G(2;\ T) \subset P(\Lambda^2 T)$ становятся комплексными проективными плоскостями. Поэтому они связны; связны также их пересечения с выпуклыми окрестностями точек $x \in G(2;\ T)$ в $P(\Lambda^2 T)$. Поэтому связны слои π_1 также для тех искривленных ГС-многообразий, которые локально являются достаточно малой деформацией плоских. Наконец, пучок $\mathscr{N} = \operatorname{Ker}\left(\pi_2^*\Omega^1 M \xrightarrow{\text{res}} \Omega^1 F/Z\right)$ в силу вычислений § 7 гл. 1 изоморфен ядру отображения $\pi_2^*(\mathscr{S}) \otimes \pi_2^*(\widetilde{\mathscr{S}}) \xrightarrow{r \otimes \mathrm{id}} \mathscr{O}_F(1) \otimes \pi_2^*(\widetilde{\mathscr{S}})$, где $r\colon \pi_2^*(\mathscr{S}) \to \mathscr{O}_F(1)$ — стандартный морфизм. Поэтому $\mathscr{N} = \Omega^1 F/P(1) \otimes \pi_2^*(\widetilde{\mathscr{S}})$ и, очевидно,

$\pi_{2*}\mathcal{N} = 0 = R^1\pi_{2*}\mathcal{N}$. Итак, прежде чем применять теорему 3, достаточно убедиться в связности слоев π_1.

8. Деформации стандартно вложенной проективной прямой. Если Z — первая база диаграммы автодуальности, то в Z имеется четырехмерное семейство погруженных проективных прямых — образы слоев π_2. Положим $P(x) = \pi_1\pi_2^{-1}(x)$, $x \in M$. Нормальный пучок вложения $P^1 \subset P^3$ в плоской диаграмме изоморфен $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$. В диаграмме, порожденной полуплоским ГС-многообразием, он изоморфен $\mathcal{N}^* \,|\, \pi_2^{-1}(x)$, т. е., по предыдущему вычислению, снова $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$.

Назовем проективную прямую, вложенную в трехмерное комплексное многообразие, стандартно вложенной, если ее нормальный пучок N_0^* есть $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$. Пусть Z — не обязательно компактное многообразие, допускающее стандартно вложенную прямую $P_0^1 \subset Z$. Пользуясь теорией деформаций Кодаиры — Спенсера, получаем следующий способ построить по (Z, P_0^1) диаграмму автодуальности, открытый Пенроузом.

а) Прямая P_0^1 включается в четырехмерное аналитическое многообразие M своих стандартно вложенных деформаций.

Подробнее, по общей теореме Дуади, P_0^1 включается в универсальное семейство деформаций внутри Z, база которого является, вообще говоря, комплексным пространством, возможно, с особенностями, нильпотентами и т. п. По теории Кодаиры — Спенсера в открытой окрестности точки x_0, отвечающей P_0^1, база семейства является на самом деле четырехмерным многообразием, ибо $\dim H^0(P^1, \mathcal{N}_0^*) = 4$ (пространство инфинитезимальных деформаций) и $\dim H^1(P^1, \mathcal{N}_0^*) = 0$ (отсутствие препятствий к продолжению деформаций). По той же теории, примененной к семейству комплексных структур на P_0^1, получаем, что открытое множество членов семейства являются проективными прямыми (сферами Римана), ибо эта структура недеформируема: $H^1(P^1, \mathcal{T}P^1) = 0$. Наконец, по той же теории, примененной к нормальному пучку вложения, получаем, что открытое множество членов семейства стандартно вложены.

б) Пусть $F \subset Z \times M$ — график универсального семейства стандартно вложенных деформаций P_0^1. Тогда слои проекции $F \to M$ являются проективными прямыми. Поэтому у каждой точки M есть окрестность, над которой F имеет вид $P(\mathcal{S}^*)$, где $\mathcal{S}^*$ — подходящий локально свободный пучок ранга 2. Ограничившись достаточно малой окрестностью M' точки $x_0 \in M$ и заменив Z на $Z' = \bigcup\limits_{x \in M'} P(x)$, получим диаграмму автодуальности $Z' \xleftarrow{\pi_1} F' \xrightarrow{\pi_2} M'$.

Заметим, что на M' имеется каноническая автодуальная ГС-структура. Действительно, пусть $\mathcal{O}(1)$ — пучок на F, отвечающий реализации $F = P(\mathcal{S}^*)$, $\mathcal{N}$ — пучок, определенный, как выше, ограничения которого на слои π_2 суть конормальные пучки к членам семейства деформаций P_0^1. Положим $\widetilde{\mathcal{S}} = \pi_{2_*}(\Omega^1 F/Z(-1))$. Из точной последовательности $0 \to \mathcal{N}(-1) \to \pi_2^*(\Omega^1 M)(-1) \to \Omega^1 F/Z(-1) \to 0$ следует, что $\widetilde{\mathcal{S}} = R^1 \pi_{2*} \mathcal{N}(-1)$ локально свободен ранга два, поскольку послойно $\mathcal{N}(-1)$ изоморфен $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2)$. Спуск на M морфизма $\pi_2^* \Omega^1 M \to \Omega^1 F/Z(-1) \otimes \mathcal{O}(1)$ аналогично доставляет изоморфизм ГС-структуры $\Omega^1 M \xrightarrow{\sim} \mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}$. Слои π_1 определяют на соответствующей 2-конической структуре интегрируемую коническую связность.

Сравнение конструкций этого и предыдущего пунктов показывает, что, по крайней мере локально по M, они взаимно обратны. Мы предоставляем читателю сформулировать этот результат на языке эквивалентности категорий ростков пространств (Z, P_0^1) и (M, x_0).

Пенроуз и Уорд показали, как явно строить примеры пространств (Z, P_0^1) с требуемыми свойствами. В их конструкциях P_0^1 реализуемо в виде сечения расслоения $Z \to P^1$, которое задано функциями перехода на стандартном покрытии Z. Дополнительно они исследовали задачу выбора такой метрики в конформном классе, определенном данной ГС-структурой, у которой была бы нулевая скалярная кривизна.

9. Римановы автодуальные многообразия. Третий и, возможно, наиболее интересный источник диаграмм автодуальности — риманова геометрия четырехмерных вещественных многообразий. Мы сформулируем ниже некоторые результаты работы Атьи, Хитчина и Зингера, в которой введена эта конструкция.

Пусть M_0 — четырехмерное ориентированное дифференцируемое многообразие с дифференцируемой конформной структурой положительно определенной сигнатуры.

Обозначим через $T_{\mathbf{C}}M_0$ тотальное пространство комплексифицированного касательного расслоения к M_0. В слоях $T_{\mathbf{C}}M_0$ лежат комплексные конусы комплексных нулевых касательных направлений. (Заметим, что при положительно определенной метрике вещественных нулевых направлений не существует.)

Пусть $Q \to M_0$ — расслоение на комплексные квадрики над M_0 базы комплексных световых конусов, погруженное в проективизацию $T_{\mathbf{C}}M_0$ над M_0. Выбор ориентации на M определяет разложение $Q = F_+ \underset{M}{\times} F_-$, где $F_\pm \to M_0$ — относительные комплексные проективные прямые (пока в дифференцируемой категории). Положим $Z = F_{-1} \xrightarrow{\pi_0} M_0$.

Локально по M_0 мы можем считать, что $F_\pm = P(\mathcal{S}_\pm)$, а дифференцируемые спинорные пучки $\mathcal{S}_\pm$ снабжены связностями $\nabla_\pm$ с нулевыми кривизнами на $\Lambda^2\mathcal{S}_\pm$, тензорное произведение которых дает связность Леви-Чивиты на комплексифицированном касательном расслоении. Предположим, что M_0 автодуально в смысле римановой геометрии; это означает, что кривизна $\Phi(\nabla_-)$ тривиальна. Используем ∇_- для локального расщепления последовательности дифференцируемых касательных пучков $\mathcal{T}_\infty$:

$$0 \to \mathcal{T}_\infty F_-/M_0 \to \mathcal{T}_\infty F_- \xrightarrow{d\pi_0} \pi_0^*\mathcal{T}_\infty M_0 \to 0.$$

Это локальное расщепление позволяет ввести на F_- почти комплексную структуру. В самом деле, $\mathcal{T}_\infty F_-/M_0$ уже снабжено комплексной структурой; далее, для каждой точки F_-, т. е. для одномерного подпространства $l(x) \subset \mathcal{S}_-(x)$, $x \in M_0$, можно использовать спинорное разложение $T_{\mathbf{C}}M_0(x) = \mathcal{S}_+^*(x) \otimes \mathcal{S}_-^*(x)$ для введения комплексной структуры на $TM_0(x)$ посредством отождествления:

$$TM_0(x) \hookrightarrow T_{\mathbf{C}}M_0(x) = \mathcal{S}_+^*(x) \otimes \mathcal{S}_-^*(x) \to \mathcal{S}_+^*(x) \otimes l(x)^{\perp}.$$

10. Теорема. а) *Описанная почти комплексная структура на $F_- = Z$ интегрируема, если и только если M_0 автодуально, т. е. $\Phi(\nabla_-) = 0$. Пусть $\mathcal{O}_Z$ — пучок голоморфных функций на Z относительно нее; тогда гладкие функции на M_0, π_0-прообраз которых принадлежит $\mathcal{O}_Z$, определяют на M_0 вещественно-аналитическую структуру.*

б) *Любая прямая $\pi_0^{-1}(x)$, $x \in M_0$, стандартно вложена в Z, и диаграмма автодуальности, построенная по такой прямой, $Z \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$, содержит диаграмму $Z \xleftarrow{\mathrm{id}} Z = \pi_2^{-1}(M_0) \xrightarrow{\pi_0} M_0$,* *описанную в предыдущем пункте (в очевидном смысле слова); в частности, M является комплексификацией M_0.*

в) *Диаграмма* $Z \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$ *снабжена вещественной структурой, для которой M_0 является множеством вещественных точек в M.* ■

Доказательство основано на прямом вычислении препятствия к интегрируемости почти комплексной структуры по Ньюлендеру — Ниренбергу; оказывается, что оно по существу совпадает с $\Phi(\nabla_-)$.

Следующая теорема совершенно аналогичным образом кодирует в голоморфных терминах расслоения с автодуальной связностью на автодуальных многообразиях в дифференцируемой категории.

Пусть $\mathscr{E}_0 \to M_0$ — локально свободный (в дифференцируемой категории) пучок. Пусть на $\mathscr{E}_0$ задана связность $\nabla\colon \mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}_0 \otimes \Omega^1 M_0$ с $\Phi_-(\nabla) = 0$.

11. Теорема. а) *Положим*

$$\mathscr{E} = \operatorname{Ker}(\pi_0^*\nabla)^{0,1}\colon\ \mathbf{C}\otimes\pi_0^*(\mathscr{E}_0) \to \mathbf{C}\otimes\pi_0^*(\mathscr{E}_0)\otimes\Omega_\infty^{0,1}Z,$$

где $\Omega_\infty^{0,1}$ означает $(0, 1)$-компоненту Дольбо гладких дифференциальных форм на Z. Тогда $\mathscr{E}$ является $\mathcal{O}_Z$-локально свободным пучком того же ранга, что $\mathscr{E}_0$.

б) *Ограничение $\mathscr{E}$ на любой слой π_0 голоморфно тривиально. Вещественная структура на Z, описанная выше, продолжается до вещественной структуры на $\mathscr{E}$, такой, что слой тотального пространства E_0 пучка $\mathscr{E}_0$ над точкой $x \in M_0$ отождествляется с пространством вещественных голоморфных сечений $\mathscr{E}$ над $\pi_0^{-1}(x)$.*

в) *Наоборот, аналитический локально свободный пучок $\mathscr{E}$ на Z со свойствами* б) *определяет на M_0 дифференцируемый локально свободный пучок $\mathscr{E}_0$ со связностью, форма кривизны которой автодуальна.* ■

Первая часть этого утверждения также устанавливается с помощью теоремы Ньюлендера — Ниренберга. В переходе с Z на M_0 наиболее существенна конструкция связности. Идея состоит в том, чтобы сначала определить аналитический пучок $\mathscr{E}_M = \pi_{2*}\pi_1^*(\mathscr{E})$ на комплексификации $M \supset M_0$. Связность на этом пучке (голоморфная) будет спуском на M относительной связности вдоль слоев π_1 на $\pi_1^*(\mathscr{E})$. (Ниже аналогичные рассуждения будут проведены подробнее.) После этого остается проверить, что связность вещественна, и ограничить ее на вещественные сечения $\mathscr{E}_M$ над M_0. Автодуальность формы кривизны будет следовать из § 7 гл. 1.

Если структурная группа $\mathscr{E}_0$ редуцирована, например, до $\mathrm{O}(n)$, то, интерпретируя эту редукцию как задание горизонтальной положительно определенной квадратичной формы на $\mathscr{E}_0$, мы можем определить аналогичную комплексную квадратичную форму на $\mathscr{E}_M$.

12. Твисторные многообразия. Комплексные трехмерные многообразия Z, обладающие стандартно-вложенной проективной прямой, по аналогии с $P(T)$ называются (искривленными) твисторными многообразиями. Их роль в теории автодуальных уравнений ясна из предыдущего. Изложим некоторые сведения о них, установленные Хитчиным.

а) Основная теорема Хитчина утверждает, что если компактное дифференцируемое многообразие M_0 имеет кэлерово твисторное пространство Z, то M_0 конформно эквивалентно либо S^4 с евклидовой метрикой, либо $P^2(\mathbf{C})$ с метрикой Фубини — Штуди. В первом случае $Z = P(\mathbf{C}^4)$, а во втором $Z = F(1, 2; \mathbf{C}^3)$.

б) Поэтому твисторные пространства простейших конформно-плоских многообразий $M_0 = S^3 \times S^1$ или $M_0 = (S^1)^4$ (плоский тор) некэлеровы. В обоих случаях Z допускает структуру расслоения над P^1, так что все стандартно вложенные прямые являются сечениями этого расслоения. В первом случае слоями являются некэлеровы многообразия Хопфа $S^3 \times S^1$. Во втором случае слои кэлеровы.

в) Пусть M_0 — тотальное пространство кокасательного пучка к S^2. На M_0 имеется автодуальная метрика, удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна, которая была построена Эгучи и Хэнсоном. Некомпактное твисторное пространство Z для M_0 получается так: следует взять два экземпляра аффинного квадратичного конуса в $\mathbf{C}^4$, разрешить особенность в вершине двумя способами, вклеив в нее прямую одного из двух семейств на базе конуса, и затем склеить эти два экземпляра по дополнению к прообразу вершины.

Аналогичная конструкция была предложена ранее Хиронакой, который установил существование непроективных алгебраических многообразий.

§ 3. Теория инстантонов

1. Определение инстантонов. Пусть G — компактная группа Ли, ρ — ее унитарное представление, S^4 — четырехмерная сфера со стандартной конформной метрикой. Пусть, далее, $\mathscr{E}_0$ — пучок гладких сечений векторного расслоения над S^4, ассоциированного с некоторым главным G-расслоением и представлением ρ. Рассмотрим гладкую связность ∇ на $\mathcal{E}_0$ с автодуальной формой кривизны, которая согласована со структурной группой (т. е. параллельные переносы переводят структурные реперы в структурные). Мы будем называть инстантоном любую такую пару $(\mathcal{E}_0, \nabla)$.

Наша ближайшая цель — дать алгебраическое описание всех инстантонов, отвечающих случаю, когда G — классическая группа одной из серий O, U, Sp, а ρ — ее простейшее представление. Точнее говоря, параметрами, от которых зависит инстантон, в нашем описании будут «данные линейной алгебры». Это либо набор матриц с точностью до некоторого отношения эквивалентности, либо набор нескольких линейных пространств и линейных операторов.

Происхождение данных линейной алгебры таково. Построим по паре $(\mathcal{E}_0, \nabla)$ локально свободный пучок $\mathcal{E}_Z$ на $P^3 = Z$, как это было объяснено в теореме 10 § 2. Учет дополнительных структур на $\mathcal{E}_Z$, связанных с его происхождением, позволит нам доказать, что $\mathcal{E}_Z$ является пучком когомологий монады, т. е. трехчленного комплекса, вида $F_{-1}\otimes\mathcal{O}_P(-1)\xrightarrow{\alpha}F_0\otimes\mathcal{O}_P\xrightarrow{\beta}F_1\otimes\mathcal{O}_P(1)$, где F_i — конечномерные линейные пространства. Задание такой монады вполне равносильно заданию отображений линейных пространств $\Gamma(\alpha(1))$: $F_{-1}\to F_0\otimes\Gamma(\mathcal{O}(1))$ и $\Gamma(\beta)$: $F_0\to F_1\otimes\Gamma(\mathcal{O}(1))$.

Опишем это соответствие подробнее.

2. Инстантоны в фундаментальном представлении G. Пусть сначала $G = \mathrm{O}(r)$, $r = \mathrm{rk}\,\mathcal{E}_0$. Для случая фундаментального представления ρ редукцию структурной группы мы будем задавать с помощью симметричной положительно определенной формы q на $\mathcal{E}_0$. Далее, редукцию к голоморфной задаче о структуре аналитического пучка $\mathcal{E}_Z$ удобно проводить, работая вместо $(\mathcal{E}_0, q)$ с комплексифицированной парой $(\mathbf{C}\otimes\mathcal{E}_0, q_{\mathbf{C}})$, на которой задана вещественная структура, позволяющая восстановить $\mathcal{E}_0$, q. Окончательно, $\mathrm{O}(r)$-инстантон мы будем считать представленным локально свободным (над $\mathcal{O}_{\infty,\mathbf{C}}$) пучком $\mathcal{E}$ ранга r на S^4 с вещественной структурой и вещественной положительно определенной формой.

Инстантоны для групп $\mathrm{U}(r)$ и $\mathrm{Sp}(r)$ мы будем трактовать соответственно как $\mathrm{O}(2r)$- или $\mathrm{O}(4r)$-инстантоны, снабженные дополнительной структурой: либо ортогональным эндоморфизмом J с $J^2 = -1$, либо двумя ортогональными эндоморфизмами J_1, J_2 с $J_1^2 = J_2^2 = -1$ и $J_1J_2 = -J_2J_1$.

Автодуальная связность ∇ вещественна, а форма q горизонтальна относительно нее.

3. Представление инстантонов на P^3. Пусть T^* — четырехмерное комплексное линейное пространство с кватернионной структурой $\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-\bar{z}_2, \bar{z}_1, -\bar{z}_4, \bar{z}_3)$. Она индуцирует на всех флаговых пространствах T вещественную структуру. В частности S^4 вкладывается в $G(2; T)$ как пространство вещественных точек (см. § 3 гл. I). Диаграмма автодуальности для S^4 будет тогда стандартной плоской диаграммой

$$Z = P(T) = P^3 \xleftarrow{\pi_1} F(1, 2; T) \xrightarrow{\pi_2} G(2; T).$$

Так как π_1 индуцирует изоморфизм $\pi_2^{-1}(S^4) \xrightarrow{\sim} P^3$, ее вещественная часть сводится к проекции $\pi\colon P^3 \to S^4$, слоями которой являются вещественные прямые в P^3.

Согласно конструкции из теоремы 11 § 2 вся информация о $(\mathscr{E}, \nabla)$ закодирована в комплексно-аналитическом локально свободном пучке $\mathscr{E}_Z = \operatorname{Ker}(\pi^*\nabla)^{0,1}$. Сверх того, $\mathrm{O}(r)$-структура определяет на $\mathscr{E}_Z$ комплексную симметричную метрику и вещественную структуру, а редукция к U или Sp — соответствующие голоморфные эндоморфизмы J. Вдоль вещественных прямых $\mathscr{E}_Z$ тривиален.

Локально свободные пучки $\mathscr{E}_Z$ с таким набором данных мы тоже будем называть инстантонными.

Реконструкция $(\mathscr{E}, \nabla)$ по $\mathscr{E}_Z$ производится с помощью обратного преобразования Радона — Пенроуза, описанного в § 2.

4. Данные линейной алгебры. Назовем ортогональными данными набор (F_{-1}, F^0, Q), где F^0 — конечномерное вещественное пространство с симметричной билинейной формой Q, F_{-1} — комплексное подпространство в $F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} T^*$, причем выполнены следующие условия:

а) Пусть $\sigma\colon T^* \to T^*$ — кватернионная структура; тогда $\left(\mathrm{id}_{F_0} \otimes \sigma\right) F_{-1} = F_{-1}$.

б) Для любого комплексного подпространства $D \subset T^*$ положим $F_D = \sum\limits_{l} \left(\mathrm{id}_{F^0} \otimes l\right) F_{-1} \subset F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} = F_0$, где l пробегает линейные функции на T^*, нулевые на D. Тогда для любой гиперплоскости D пространство F_D изотропно относительно Q, а для любой σ-инвариантной плоскости D имеем: $\dim F_D = 2 \dim F_{-1}$.

в) Форма Q положительно определена на всех подпространствах $F_D^{\perp} \cap F^0$, где D пробегает σ-инвариантные плоскости в T^*. Позже мы покажем, что из в) вытекает формально более сильное требование, которым легче пользоваться:

в′) Форма Q положительно определена.

Унитарные (соответственно симплектические) данные — это ортогональные данные, дополнительно снабженные ортогональным оператором J': $F_0 \to F_0$ (соответственно двумя ортогональными операторами J_1', J_2') с условиями:

г) $J'^2 = -1$ (соответственно $J_1'^2 = J_2'^2 = -1$, $J_1'J_2' = -J_2'J_1'$).

д) Подпространство F_{-1} инвариантно относительно $J' \otimes \mathrm{id}_{T^*}$ (соответственно $J_1' \otimes \mathrm{id}_{T^*}$, $J_2' \otimes \mathrm{id}_{T^*}$).

5. Конструкция инстантонов по данным линейной алгебры. Данным (F_{-1}, F^0, Q) отвечает следующее инстантонное расслоение (E_0, ∇) над сферой S^4, параметризующей σ-инвариантные плоскости $D \subset T^*$: слоем E_0 над точкой, отвечающей D, является $F_D^{\perp} \cap F^0$; ортогональная метрика на слоях индуцирована формой Q; комплексная (соответственно кватернионная) структура на слоях в случаях U, Sp индуцирована операторами J' (соответственно J_1', J_2'). Связность ∇ является ортогональной проекцией тривиальной связности на тривиальном расслоении на S^4 со слоем F^0, куда погружено E_0.

6. Координаты. Утверждение о том, что связность ∇, определенная в предыдущем пункте, автодуальна, можно проверить прямым вычислением. Введем здесь координаты, в которых такие вычисления удобны.

Пусть $\mathbf{R}^4$ — евклидово пространство с метрикой $\sum dx_i^2$. Удобно представлять себе его точку как кватернион. Точнее, пусть X — такая 2×2-матрица, что

$$X^t = \sum_{a=1}^{3} i x_a \sigma_a + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 + i x_3 & x_2 + i x_1 \\ -x_2 + i x_1 & x_4 - i x_3 \end{pmatrix};$$

где σ_a — матрицы Паули. Поставим в соответствие точке $x \in \mathbf{R}^4$ комплексную плоскость

$$P_x = \left\{ (z_1, \ldots, z_4) \middle| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = X^+ \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \right\} \subset T^*.$$

Положим также $P_\infty = \{(z_1, z_2, 0, 0)\}$.

Нетрудно убедиться, что $\sigma(P_x) = P_x$ для всех $x \in \mathbf{R}^4 \cup \{\infty\}$ и, наоборот, любая σ-инвариантная плоскость в T^* имеет вид P_α или P_x. Сверх того, любая точка $z \in T^* \setminus P_\infty$

лежит в плоскости P_x, где

$$x_2 + ix_1 = \frac{-z_2\bar{z}_3 + z_4\bar{z}_1}{|z_3|^2 + |z_4|^2}, \quad x_4 + ix_1 = \frac{z_2\bar{z}_4 + z_3\bar{z}_1}{|z_2|^2 + |z_4|^2}.$$

Это и есть описание в координатах отображения

$$\pi\colon T^*\backslash\{0\}/\mathbf{C}^* \to \mathbf{R}^4 \cup \{\infty\} = S^4, \quad \pi(z) = x \Leftrightarrow z \in P_x.$$

Базис пространства автодуальных 2-форм на $\mathbf{R}^4$ есть $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$, $dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4$, $dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3$. Поднимая его на $P^3\backslash P_\infty$ с помощью π^*, нетрудно убедиться, что получится базис 2-форм типа (1, 1). Положив $\nabla_a = \pi^*(\nabla)(\partial/\partial z_a)$, $\nabla_{\bar{a}} = \pi^*(\nabla)(\partial/\partial \bar{z}_a)$ (подъем на $\mathbf{C}^4$), находим отсюда, что уравнения автодуальности для $\mathscr{E}_0$ равносильны уравнениям $[\nabla_a, \nabla_b] = [\nabla_{\bar{a}}, \nabla_{\bar{b}}] = 0$ для $\pi^*\left(\mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathscr{E}_0\right)$, откуда и следует, что $\mathscr{E}_Z$ локально свободен над $\mathcal{O}_Z$ того же ранга, что $\mathscr{E}_0$.

Теперь мы можем точно сформулировать основной результат этого параграфа.

7. **Теорема.** *Все инстантоны получаются с помощью описанной в п. 6 конструкции из некоторых данных линейной алгебры; если два набора данных неизоморфны, то отвечающие им инстантоны не изоморфны.* ■

Доказательство теоремы состоит из нескольких шагов. Его основные этапы таковы: а) выяснение структуры пространств когомологий пучка $\mathscr{E}_Z$, отвечающего инстантону; б) доказательство того, что пучок с такими когомологиями может быть построен с помощью монады; в) выражение в терминах монады дополнительных инстантонных структур и перевод их на язык линейной алгебры; 3) проверка того, что инстантонный пучок, отвечающий получившимся данным линейной алгебры, изоморфен исходному.

Нужные нам сведения о когомологиях $\mathscr{E}_Z$ содержатся в следующем утверждении.

8. **Предложение.** *$H^i(\mathscr{E}_Z(k)) = 0$ при $i \leqslant 1$, $i + k \leqslant -1$ и при $i \geqslant 2$, $i + k \geqslant 0$.*

9. **Основная лемма.** *$H^1(\mathscr{E}_Z(-2)) = 0$.*

10. **Вывод предложения 8 из основной леммы.** Если $(\mathscr{E}_0, \nabla)$ — инстантоны, то двойственная пара $(\mathscr{E}_0^*, \nabla^*)$ также является инстантоном, и на Z ей отвечает пучок $\mathscr{E}_Z^* = \mathscr{H}om(\mathscr{E}_Z, \mathcal{O})$. По теореме двойственности Серра $H^i(\mathscr{E}_Z(k))^* = H^{3-i}(\mathscr{E}_Z^*(-4-k))$. Это позволяет ограничиться выводом того, что $H^i(\mathscr{E}_Z(k)) = 0$ при $i \leqslant 1$, $i + k \leqslant$

$\leqslant -1$. Так как ограничение $\mathscr{E}_Z$ на вещественные прямые тривиально, то тривиально и ограничение на почти все прямые (в топологии Зариского). Поскольку $H^0(P^1, \mathcal{O}(k)) = 0$ при $k < 0$, любое сечение $s \in H^0(\mathscr{E}_Z(k))$ при $k < 0$ обращается в нуль на почти всех прямых и потому равно нулю.

Пусть, далее, $D \subset \mathbb{C}P^3$ — плоскость, содержащая один из слоев $\pi^{-1}(x)$, $x \in S^4$. Тогда ограничение $\mathscr{E}_Z$ на почти любую прямую в D тривиально. По предыдущему рассуждению, тогда $H^0(D, \mathscr{E}_Z(k)|D) = 0$ при $k < 0$. Стандартная точная последовательность $H^0(\mathscr{E}_Z(k)|D) \to H^1(\mathscr{E}_Z(k-1)) \to H^1(\mathscr{E}_Z(k))$ и индукция вниз по k, начиная с $k = -2$ (основная лемма), дают $H^1(\mathscr{E}_Z(k)) = 0$ при $k \leqslant -2$. ■

11. План доказательства основной леммы. Общий механизм, лежащий в основе доказательства,— это отождествление пространства $H^1(\mathscr{E}_Z(-2))$ с ядром оператора Лапласа инстантонной связности на S^4. Этот оператор конформно инвариантен, и стандартные соображения показывают, что его ядро равно нулю. Более общо́, все группы когомологий скрученных пучков $\mathscr{E}_Z$ допускают аналогичную интерпретацию в терминах ядер и коядер инвариантных дифференциальных операторов, связанных с $(\mathscr{E}_0, \nabla)$; за исключением интересующего нас случая, эти операторы имеют порядок 1. Когомологические причины этого явления и соответствующие точные формулировки будут объяснены позже в этой главе в контексте неавтодуального преобразования Радона — Пенроуза. Здесь же мы ограничимся детальными вычислениями в конкретной ситуации.

План доказательства следующий. Группу $H^1(\mathscr{E}_Z(-2))$ можно вычислять как группу когомологий начального отрезка комплекса Дольбо:

$$\Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty}(-2)) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty}(-2)\otimes\Omega^{0,1}) \xrightarrow{\bar\partial}$$
$$\xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty}(-2)\otimes\Omega^{0,2}),$$

где ∞ указывает на переход к гладким сечениям пучка. В силу основной конструкции $\bar\partial$ на $\mathscr{E}_{Z,\infty}$ совпадает с $\pi^*(\nabla)^{0,1}$. Мы должны показать, что если $\omega \in \Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty}(-2)\otimes\Omega^{0,1})$ и $\bar\partial\omega = 0$, то $\omega = \bar\partial\nu$ для некоторого $\nu \in \Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty}(-2))$. Обозначим через ω_v образ ω в $\mathscr{T}^*_\infty P/S^4$, т. е. ограничение ω на вертикальные векторные поля. Из локальных вычислений, которые мы проделаем ниже, будет следовать, что если $\omega_v = 0$, то $\omega = 0$. Поэтмоу мы будем искать такое сечение $\nu \in \Gamma(\mathscr{E}_Z(-2))$, что $(\omega - \bar{\partial}\nu)_v = 0$. Последпее свойство примерно означает, что ω становится $\bar{\partial}$-замкнутой после ограничения на слои π. Так как $H^1(P^1, \mathcal{O}(-2)) \neq 0$, мы не можем ожидать, что это свойство будет выполнено автоматически. Однако так как $H^1(P^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$, то, фиксировав вложение $\mathcal{O}(-2) \subset \subset \mathcal{O}(-1)$, на каждом слое $\pi^{-1}(x)$ можно найти такое сечение ν_x пучка $\mathscr{E}_Z(-1)|\pi^{-1}(x)$, что $\omega|\pi^{-1}(x) = \bar{\partial}\nu_x$. Кроме того, $H^0(P^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$, так что формы ν_x при данном вложении определены однозначно. Мы проверим, что они склеиваются в глобальное сечение ν пучка $\mathscr{E}_Z(-1)$. После этого останется установить, что ν приходит из $\mathcal{O}(-2)$. С этой целью придется перейти к более локальным рассмотрениям. Выберем плоскость $D \subset \mathbf{C}P^3$ и реализуем $\mathcal{O}(-2)$ как пучок локальных голоморфных уравнений объединения $D \cup \sigma D$; соответственно реализуем $\mathscr{E}_Z(-2) \subset \mathscr{E}_Z$. По предыдущему рассуждению, $\omega_v = \bar{\partial}\nu_{D,v} = \bar{\partial}\nu_{\sigma D,v}$, где ν_D гладко делится на локальные уравнения D, а $\nu_{\sigma D}$ гладко делится на уравнения σD. Мы покажем, что $\nu_D = \nu_{\sigma D}$, так что $\nu = \nu_D = \nu_{\sigma D}$ лежит в $\Gamma(\mathscr{E}_Z(-2))$. Равенство $\nu_D - \nu_{\sigma D} = 0$ будет следовать из того, что $\nu_D - \nu_{\sigma D}$ окажется подъемом гладкого сечения $\mathscr{E}_0 \otimes \mathbf{C}$ пад S^4, лежащего в ядре оператора Лапласа связности ∇ и быстро убывающего «на бесконечности», которой отвечает здесь точка $\pi(D \cap \sigma D)$. Первый факт является отражением $\bar{\partial}$-замкнутости ω (поскольку ν_D и $\nu_{\sigma D}$ получаются из ω интегрированием, разность $\nu_D - \nu_{\sigma D}$ аннулируется дифференциальным оператором второго порядка). Для оценки $\nu_D - \nu_{\sigma D}$ (в эрмитовой метрике $\langle\nu, \nu\rangle = (\bar{\nu}, \nu))$ вблизи $\pi(D \cap \sigma D)$ придется выбрать еще пару плоскостей D, $\sigma D'$, провести аналогичные конструкции для них и сравнить результаты.

Приступим к реализации этого плана. В качестве D, D' выберем соответственно плоскости $z_3 = 0$ и $z_1 = 0$.

12. Вычисления в координатах. В координатах из п. 6 положим $\xi = x_2 + ix_1$, $\eta = x_4 + ix_3$. Отображепие π задается в них формулами

$$z_1 = \bar{\eta} z_3 + \bar{\xi} z_4, \qquad z_2 = -\xi z_3 + \eta z_4. \tag{1}$$

Пусть $U_i \subset P^3$ — множество точек, где $z_i \neq 0$. Положим $\lambda = z_3/z_4$. Так как $U_3 \cup U_4 = \pi^{-1}(\mathbf{R}^4)$, функции $(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}, \lambda, \bar{\lambda})$ образуют гладкую (комплексную) систему координат в U_4 (мы пишем ξ вместо $\pi^*(\xi)$ и т. п.). С другой стороны, функции $(z_1/z_4,\ z_2/z_4,\ \lambda)$ образуют голоморфную систему координат в U_4, а из (1) видно, что

$$z_1/z_4 = \bar{\eta}\lambda + \bar{\xi}, \qquad z_2/z_4 = -\xi\lambda + \eta. \tag{2}$$

Поэтому $(d\bar{\lambda},\ d''\bar{\eta},\ d''\xi)$ образуют базис пространства (0, 1)-форм в каждой точке U_4.

Фиксируем некоторую $\bar{\partial}$-замкнутую форму $\omega \in \Gamma(\mathscr{E}_Z(-2) \otimes \Omega^{0,1})$. После отождествления $\mathcal{O}(-2)$ с пучком голоморфных уравнений пары плоскостей $z_3 = 0$ и $z_4 = 0$ она будет представлена формой $\omega_{34} \in \Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty} \otimes \Omega^{0,1})$, локально гладко делящейся на эти уравнения. Представим ω_{34} на U_4 в виде

$$\omega_{34} = f\, d\bar{\lambda} + g d''\xi + h\, d''\bar{\eta} \tag{3}$$

и будем рассматривать f, g, h как гладкие сечения расслоения E_0 над $\mathbf{R}^4$, гладко зависящие от λ как от параметра. Ковариантное дифференцирование по $\bar{\lambda}$ совпадает с обычной частной производной.

Голоморфное обращение ω_{34} в нуль на $z_3 = 0$ означает, что сечения $f\lambda^{-1}$, $g\lambda^{-1}$, $h\lambda^{-1}$ остаются гладкими при $\lambda = 0$.

Из (2) следует, что в каждой точке U_3 базис пространства (0, 1)-форм образуют формы $(d\bar{\lambda}^{-1},\ d''\bar{\xi},\ d''\eta) = (-\bar{\lambda}^{-2}d\bar{\lambda},\ -\lambda\, d''\bar{\eta},\ -\lambda\, d''\xi)$. Записав ω_{34} в этом базисе с помощью (3), находим, что из делимости ω_{34} па z_4 следует, что сечения $f\bar{\lambda}\lambda^2$, g, h остаются гладкими при $\lambda = \infty$.

Положим $\nabla_\xi = \nabla(\partial/\partial\xi)$ и т. п. Поскольку $\bar{\partial} = (\pi^*\nabla)^{0,1}$, имеем

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}}\, d\bar{\lambda} + \nabla_\xi(f)\, d''\xi + \nabla_{\bar{\xi}}(f)\, d''\bar{\xi} + \nabla_\eta(f)\, d''\eta +$$
$$+ \nabla_{\bar{\eta}}(f) d''\bar{\eta} = \frac{\partial f}{\partial\bar{\lambda}}\, d\bar{\lambda} + (\nabla_\xi + \lambda\nabla_\eta) f\, d''\xi + (\nabla_{\bar{\eta}} - \lambda\nabla_{\bar{\xi}}) f\, d''\bar{\eta}. \tag{4}$$

Подобные же формулы справедливы для g и h. Поэтому условие $\bar{\partial}\omega_{34} = 0$ означает, что

$$(\nabla_\xi + \lambda\nabla_\eta) f = \partial g/\partial\bar{\lambda}, \quad (\nabla_{\bar{\eta}} - \lambda\nabla_{\bar{\xi}}) f = \partial h/\partial\bar{\lambda}, \tag{5}$$

$$(\nabla_{\bar{\eta}} - \lambda\nabla_{\bar{\xi}}) g = (\nabla_\xi + \lambda\nabla_\eta) h. \tag{6}$$

Из формул п. 6 следует, что $[\nabla_\xi + \lambda\nabla_\eta,\ \nabla_{\bar{\eta}} - \lambda\nabla_{\bar{\xi}}] = 0$. Теперь можем проверить, что при $\omega_v = 0$ обязательно $\omega = 0$. В самом деле, (3) показывает, что при $\omega_v = 0$ имеем $f = 0$. Согласно формулам (5) тогда сечения g и h голоморфно зависят от λ. Значит, они постоянны вдоль слоев π, ибо $\mathscr{E}_Z$ голоморфно тривиален вдоль слоев. Но при $\lambda = 0$ они обращаются в нуль и, стало быть, равны нулю тождественно.

13. Сечения ν_3 и ν_4. Как мы уже объясняли, для каждой точки $x \in \mathbf{R}^4$ существует единственное гладкое сечение ν_3 пучка $\mathscr{E}_{Z,\infty}$ вдоль $\pi^{-1}(x)$, обращающееся в нуль в точке $\lambda = 0$ (т. е. в $\pi^{-1}(x) \cap (z_3 = 0)$) и такое, что $f = \partial\nu_3/\partial\bar\lambda$. Аналогичное сечение с нулем в $z_4 = 0$ обозначим ν_4. Гладкую зависимость ν_3 и ν_4 от x, позволяющую считать их сечениями $\mathscr{E}_{Z,\infty}$ над $U_3 \cup U_4$, можно усмотреть из интегральной формулы

$$\nu_4(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta, x)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta,$$

пользуясь оценкой $|f(\lambda, x)| = O((1 + |\lambda|)^{-3})$, вытекающей из гладкости $f\bar\lambda\lambda^2$ при $\lambda = \infty$, и аналогично для ν_3. Очевидно, ν_3 и ν_4 характеризуются своими нулями и тем, что $(\omega_{34} - \bar\partial\nu_3)_v = (\omega_{34} - \bar\partial\nu_4)_v = 0$.

Положим $\gamma = \nu_3 - \nu_4$, $\nabla_a = \nabla(\partial/\partial x_a)$.

14. Лемма. *Сечение* γ *постоянно вдоль слоев* π, *и* $\nabla_a\nabla_a\gamma = 0$.

Доказательство. Первое утверждение, как выше, выводится из того, что $\partial\gamma/\partial\bar\lambda = 0$. Для доказательства второго заметим прежде всего, что

$$g = \nabla_\xi\nu_3 + \lambda\nabla_\eta\nu_4, \quad h = \nabla_{\bar\eta}\nu_3 - \lambda\nabla_{\bar\xi}\nu_4. \tag{7}$$

В самом деле, $\partial/\partial\bar\lambda(g - \nabla_\xi\nu_3 - \lambda\nabla_\eta\nu_4) = 0$ в силу формул (5). Кроме того, g, $\nabla_\xi\nu_3$ и $\lambda\nabla_\eta\nu_4$ локально делятся на голоморфные уравнения плоскости $z_3 = 0$, так что не зависящее от λ сечение $g - \nabla_\xi\nu_3 - \lambda\nabla_\eta\nu_4$ должно быть нулевым. Аналогично доказывается формула для h. Теперь подставим в (6) правые части (7). Переписав (7) в виде $g = (\nabla_\xi + \lambda\nabla_\eta)\nu_3 - \lambda\nabla_\eta\gamma$, $h = (\nabla_{\bar\eta} - \lambda\nabla_{\bar\xi})\nu_3 + \lambda\nabla_{\bar\xi}\gamma$ и пользуясь тем, что $[\nabla_\xi + \lambda\nabla_\eta, \nabla_{\bar\eta} - \lambda\nabla_{\bar\xi}] = 0$, получаем $(\nabla_\xi\nabla_{\bar\xi} + \nabla_{\bar\eta}\nabla_\eta) = 0$. Пересчитаем последний оператор в терминах ∇_a, учтя автодуальность $([\nabla_1, \nabla_2] = [\nabla_3, \nabla_4]$ и т. п.). Получим $\frac{1}{4}\nabla_a\nabla_a$. ■

15. Вычисления на $U_1 \cup U_2$. Теперь мы отождествим пучок $\mathcal{O}(-2)$ с пучком уравнений $(z_1 = 0) \cup (z_2 = 0)$ и обозначим через $\omega_{12} \in \Gamma(\mathscr{E}_{Z,\infty} \otimes \Omega^{0,1})$ соответствующий образ формы ω. Можно считать, что $\omega_{12} = (z_1 z_2/z_3 z_4)\omega_{34}$ (при стандартном выборе функций перехода). Как выше, построим сечения ν_1 и ν_2 из $\Gamma(U_1 \cup U_2, \mathscr{E}_{Z,\infty})$ с нулями в $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ соответственно и с условиями $(\omega_{12} - \bar\partial\nu_1)_v = (\omega_{12} - \bar\partial\nu_2)_v = 0$. Чтобы написать формулы, связывающие ν_1, ν_2 с ν_3, ν_4, положим

$$\hat\xi = \xi(|\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1}, \qquad \hat\eta = \eta(|\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1}.$$

Функции $(\hat\xi, \hat\eta, \bar{\hat\xi}, \bar{\hat\eta})$ являются гладкими координатами на $(\mathbf{R}^4\backslash\{0\}) \cup \{\infty\} = S^4\backslash\{0\} = \pi(U_1 \cup U_2)$.

16. Лемма. *На* $(U_1 \cup U_2) \cap (U_3 \cup U_4)$ *имеем*

$$\nu_3 = z_3 z_2^{-1}\hat\xi\nu_2 + z_3 z_1^{-1}\bar{\hat\eta}\nu_1,$$

$$\nu_4 = z_4 z_2^{-1}\hat\eta\nu_2 - z_4 z_1^{-1}\bar{\hat\xi}\nu_1.$$

Доказательство. Правые части этих формул, очевидно, делятся на z_3 и z_4 соответственно. Поэтому достаточно проверить, что

$$\left[\omega_{34} - \bar\partial\left(z_3 z_2^{-1}\hat\xi\nu_2 + z_3 z_1^{-1}\bar{\hat\eta}\nu_1\right)\right]_v = 0$$

и аналогично для ν_4. Имеем

$$\left[\bar\partial\left(z_3 z_2^{-1}\hat\xi\nu_2 + z_3 z_1^{-1}\bar{\hat\eta}\nu_1\right)\right]_v = \left(z_3 z_2^{-1}\hat\xi + z_3 z_1^{-1}\bar{\hat\eta}\right)\omega_{12,v} =$$

$$= z_3(z_1 z_2)^{-1}(|\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1}(z_1\xi + z_2\bar\eta)\,\omega_{12,v}.$$

Но в силу (1) имеем

$$z_1\xi + z_2\bar\eta = (\bar\eta z_3 + \bar\xi z_4)\xi + (-\xi z_3 + \eta z_4)\bar\eta = (|\xi|^2 + |\eta|^2)z_4.$$

Поэтому последнее выражение равно $(z_3 z_4)(z_1 z_2)^{-1}\omega_{12,v} = \omega_{34,v}$. Аналогично доказывается тождество для ν_4. ■

17. Следствие. *На* $(U_1 \cup U_2) \cap (U_3 \cup U_4)$ *имеем*

$$\gamma = \nu_3 - \nu_4 = (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1}(\nu_1 - \nu_2) = |x|^{-2}(\nu_1 - \nu_2).$$

В частности, поскольку $\nu_1 - \nu_2$ *— гладкое сечение вблизи* ∞, *сечение* γ *также гладкое вблизи* ∞ *и* $|\gamma| = O(|x|^{-2})$ *в послойной эрмитовой метрике.*

Доказательство. Из леммы 16 и формул (1) следует, что

$$\nu_3 - \nu_4 = \left(z_3 z_2^{-1}\hat\xi - z_4 z_2^{-1}\hat\eta\right)\nu_2 + \left(z_3 z_1^{-1}\bar{\hat\eta} + z_4 z_1^{-1}\bar{\hat\xi}\right)\nu_1 =$$

$$= (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1}\left[(z_3\xi - z_4\eta)\,z_2^{-1}\nu_2 + (z_3\bar\eta + z_4\bar\xi)\,z_1^{-1}\nu_1\right] =$$

$$= (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1}(\nu_1 - \nu_2). \quad ■$$

18. Окончание доказательства основной леммы. Нам осталось проверить, что $\gamma = 0$. Положим

$$I_R = \int\limits_{|x| \leqslant R} \langle \nabla_a \gamma, \nabla_a \gamma \rangle \, d^4x.$$

Из леммы 14 и формулы Стокса находим

$$I_R = \int\limits_{|x| \leqslant R} \partial_a \langle \gamma, \nabla_a \gamma \rangle \, d^4x = \int\limits_{|x| = R} \langle \gamma, \nabla_a \gamma \rangle \, d_a^3 x,$$

где $d_a^3 x = \bigwedge\limits_{i \neq x} dx_i (-1)^{a-1}$. По следствию 17 $|\gamma| = O(R^{-2})$, $|\nabla_a \gamma| = O(R^{-3})$ на сфере большого радиуса R, так что $I_R = O(R^3 \cdot R^{-5}) = O(R^{-2})$. Поскольку метрика $\langle\ ,\ \rangle$ положительно определена, отсюда вытекает, что $\nabla_a \gamma = 0$ для всех a, так что $\partial_a |\gamma| = 0$, т. е. $|\gamma|$ постоянно. Но $\gamma(\infty) = 0$, что завершает доказательство. ■

19. Специальные монады. Теперь мы приступим ко второму этапу доказательства теоремы 7: выяснению связи между пучками $\mathscr{E}_Z$ и монадами.

Назовем локально свободный пучок $\mathscr{E}_Z$ на P^3 допустимым, если его когомологии, перечисленные в предложении 8, обращаются в нуль. С другой стороны, назовем специальной монадой комплекс пучков вида $\mathscr{F}\colon F_{-1} \otimes \mathscr{O}_P(-1) \xrightarrow{\alpha} F_0 \otimes \mathscr{O}_P \xrightarrow{\beta} F_1 \otimes \mathscr{O}_P(1)$, где α — локально прямое вложение, β — сюръекция. Поставим в соответствие монаде $\mathscr{F}$ пучок $\mathscr{E}(\mathscr{F}) = \operatorname{Ker} \beta / \operatorname{Im} \alpha$.

20. Предложение. *Для всякой специальной монады $\mathscr{F}$ пучок $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathscr{F})$ допустим.*

Доказательство. Положим $\mathscr{K} = \operatorname{Ker} \beta$. Из последовательности $0 \to \mathscr{K} \to F_0 \otimes \mathscr{O} \to F_1 \otimes \mathscr{O}(1)$ находим $H^{i-1}(F_1 \otimes \mathscr{O}(k+1)) \to H^i(\mathscr{K}(k)) \to H^i(F_0 \otimes \mathscr{O}(k))$. В области значений (i, k), где когомологии допустимых пучков обращаются в нуль, две крайние группы равны нулю, так что $H^i(\mathscr{K}(k) = 0)$. Далее, из последовательности $0 \to F_{-1} \otimes \mathscr{O}(-1) \to \mathscr{K} \to \mathscr{E} \to 0$ находим $H^i(\mathscr{K}(k)) \to H^i(\mathscr{E}(k)) \to H^{i+1}(F_{-1} \otimes \mathscr{O}(-k-1))$, откуда $H^i(\mathscr{E}(k)) = 0$, потому что последняя группа также аннулируется. ■

21. Предложение. *Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — две специальные монады. Тогда естественное отображение* $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2) \to \operatorname{Hom}(\mathscr{E}(\mathscr{F}_1), \mathscr{E}(\mathscr{F}_2))$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Морфизмом монад называется морфизм комплексов. Положим $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}(\mathscr{F}_i)$, $\mathscr{K}_i = \operatorname{Ker} \beta_i$,

$i=1, 2$. Из точной последовательности $0 \to F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{K}_2 \to \mathcal{E}_2 \to 0$ находим

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \to$$
$$\to \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_2) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{K}_1', F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)).$$

Покажем, что два крайних пучка обращаются в нуль. Из точной последовательности $0 \to \mathcal{K}_1 \to F_{0,1} \otimes \mathcal{O} \to F_{1,1} \otimes \otimes \mathcal{O}(1) \to 0$ находим

$$\operatorname{Hom}(F_{0,1} \otimes \mathcal{O}, F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, F_{-1,2} \otimes$$
$$\otimes \mathcal{O}(-1)) \to \operatorname{Ext}^1(F_{1,1} \otimes \mathcal{O}(1), F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)),$$
$$\operatorname{Ext}^1(F_{0,1} \otimes \mathcal{O}, F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{K}_1, F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^2(F_{1,1} \otimes \mathcal{O}_P(1), F_{-1,2} \otimes \mathcal{O}(-1)).$$

Крайние члены здесь обращаются в нуль, потому что $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = H^i(\mathcal{H}_1^* \otimes \mathcal{H}_2)$ для локально свободных пучков $\mathcal{H}_i$. Значит, и средние члены равны нулю, так что $\operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_2)$. В частности, каждый морфизм пучков $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ однозначно продолжается до морфизма $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{E}_2$ и затем до морфизма $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$, очевидно, переводящего $\operatorname{Im} \alpha_1$ в $\operatorname{Im} \alpha_2$.

Теперь из точной последовательности $0 \to \mathcal{K}_1 \to F_{0,1} \otimes \otimes \mathcal{O} \to F_{1,1} \otimes \mathcal{O}(1) \to 0$ находим

$$0 \to \operatorname{Hom}(F_{1,1} \otimes \mathcal{O}(1), F_{0,2} \otimes \mathcal{O}) \to$$
$$\to \operatorname{Hom}(F_{0,1} \otimes \mathcal{O}, F_{0,2} \otimes \mathcal{O}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, F_{0,2} \otimes \mathcal{O}) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^1(F_{1,1} \otimes \mathcal{O}(1), F_{0,2} \otimes \mathcal{O}).$$

Как выше, два крайних пучка равны нулю, так что $\operatorname{Hom}(F_{0,1} \otimes \mathcal{O}, F_{0,2} \otimes \mathcal{O}) \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{K}_1, F_{0,2} \otimes \mathcal{O})$. В частности, любой морфизм $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ индуцирует морфизм $\mathcal{K}_1 \to F_{0,2} \otimes \otimes \mathcal{O}$, который продолжается до единственного морфизма $F_{0,1} \otimes \mathcal{O} \to F_{0,2} \otimes \mathcal{O}$. Если морфизм $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ был продолжением $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$, то построенный по нему морфизм $F_{0,1} \otimes \otimes \mathcal{O} \to F_{0,2} \otimes \mathcal{O}$ переводит $\operatorname{Ker} \beta_1$ в $\operatorname{Ker} \beta_2$ и поэтому факторизуется до морфизма $F_{1,1} \otimes \mathcal{O}(1) \to F_{1,2} \otimes \mathcal{O}(1)$. Окончательно, мы установили, что любой морфизм пучков $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ индуцирован единственным морфизмом монад $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. ■

22. **Предложение.** *Функтор, ставящий в соответствие специальной монаде $\mathcal{F}$ пучок $\mathcal{E}(\mathcal{F})$, определяет эквивалентность категорий специальных монад и допустимых пучков.*

Доказательство. С учетом предложений 20 и 21 нам осталось построить только обратный функтор.

Покажем, что по каждому допустимому пучку $\mathscr{E}$ можно построить следующие объекты, функториально зависящие от $\mathscr{E}$:

а) специальную монаду $(F_{-1}, F_0, F_1, \alpha, \beta)$ с $F_{-1} = H^1(\mathscr{E} \otimes \Omega^2 P(1))$, $F_0 = H^1(\mathscr{E} \otimes \Omega^1 P)$, $F_1 = H^1(\mathscr{E}(-1))$;

б) изоморфизм $\mathscr{E} \to \operatorname{Ker} \beta/\operatorname{Im} \alpha$.

Пусть $\mathcal{O}_\Delta$ — прямой образ структурного пучка на диагонали $P \times P$, $p_i\colon P \times P \to P$ — две проекции. Обозначим через $K_\cdot \to \mathcal{O}_\Delta$ резольвенту Кошуля. Это комплекс $K_i = p_i^* \mathcal{O}(i+1) \otimes p_2^* \Omega^{-i}(-i-1), i \leqslant 0$, $K_i = 0$ при $i \leqslant -4$. Каждый дифференциал $d_i\colon K_i \to K_{i+1}$ является умножением (и сверткой по второму сомножителю) на канонический элемент из $H^0(p_1^* \mathcal{O}(1) \otimes p_2^* \mathscr{T}P(-1)) \simeq T \otimes T^*$, т. е. на $\sum_{i=1}^{4} p_1^*(z_i) \otimes p_2^*\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$. Комплекс Кошуля $K_\cdot \otimes p_2^* \mathscr{E} \to \mathcal{O}_\Delta \otimes p_2^* \mathscr{E}$ является функториальной по $\mathscr{E}$ резольвентой «пучка $\mathscr{E}$, сосредоточенного на диагонали».

Дальнейшие рассуждения прозрачны с точки зрения теории производных категорий. Отображение $K_\cdot \otimes p_2^* \mathscr{E} \to \mathcal{O}_\Delta \otimes p_2^* \mathscr{E}$ является квазиизоморфизмом. Поэтому пучок $p_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes p_2^* \mathscr{E}) = \mathscr{E}$ квазиизоморфен комплексу $R_{p_{1*}}(K_\cdot \otimes p_2^* \mathscr{E})$. Чтобы вычислить один из представителей этого объекта в производной категории, можно поступать по-разному. Желая обойтись в этом месте минимумом гомологической алгебры, мы просто разобьем $K_\cdot \otimes p_2^* \mathscr{E}$ на точные тройки и для каждой из них напишем интересующую нас часть точной последовательности высших прямых образов. Вычисления удобно организовать так.

Положим $\mathscr{K} = \operatorname{Im} d_{-2} = \operatorname{Ker} d_{-1}$, $J = \operatorname{Im} d_{-1}$. Следующая точная последовательность является «серединой резольвенты»: $0 \to \mathscr{K} \otimes p_2^* \mathscr{E} \to p_2^*(\mathscr{E} \otimes \Omega^1) \to J \otimes p_2^* \mathscr{E} \to 0$. Вот часть ее спуска на P:

$$p_{1*}(J \otimes p_2^* \mathscr{E}) \to R^1 p_{1*}(\mathscr{K} \otimes p_2^* \mathscr{E}) \to R^1 p_{1*}(p_2^*(\mathscr{E} \otimes \Omega^1)) \to$$
$$\to R^1 p_{1*}(J \otimes p_2^* \mathscr{E}) \to R^2 p_{1*}(\mathscr{K} \otimes p_2^* \mathscr{E}). \qquad (8)$$

Вычислим по очереди входящие сюда пучки.

Первый пучок. Вложение $0\to J\otimes p_2^*\mathscr{E}\to p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes \otimes p_2^*\mathscr{E}(-1)$ индуцирует вложение

$$0\to p_{1*}\left(J\otimes p_2^*\mathscr{E}\right)\to p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes p_2^*\mathscr{E}(-1)\right).$$

В дальнейшем мы будем многократно пользоваться формулой проекции $R^ip_{1*}\left(p_1^*\mathscr{H}_1\otimes p_2^*\mathscr{H}_2\right)=\mathscr{H}_1\otimes H^i(\mathscr{H}_2)$, верной для любых локально свободных пучков на P. В частности,

$$p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes p_2^*\mathscr{E}(-1)\right)=\mathcal{O}(1)\otimes H^i(\mathscr{E}(-1))=0,$$

в силу допустимости $\mathscr{E}$, так что

$$p_{1*}\left(J\otimes p_2^*\mathscr{E}\right)=0. \tag{9}$$

Второй пучок. Начало резольвенты $K.\otimes p_2^*\mathscr{E}\to\mathcal{O}_\Delta\otimes p_2^*\mathscr{E}$ имеет вид

$$0\to p_1^*\mathcal{O}(-2)\otimes p_2^*(\mathscr{E}\otimes\Omega^3(2))\to$$
$$\to p_1^*\mathcal{O}(-1)\otimes p_2^*(\mathscr{E}\otimes\Omega^2(1))\to\mathscr{K}\otimes p_2^*\mathscr{E}\to 0.$$

Отсюда находим точную последовательность

$$R^1p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(-2)\otimes p_2^*(\mathscr{E}\otimes\Omega^3(2))\to\right.$$
$$\to R^1p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(-1)\otimes p_2^*(\mathscr{E}\otimes\Omega^2(1))\right)\to R^1p_{1*}\left(\mathscr{K}\otimes p_2^*\mathscr{E}\right)\to$$
$$\to R^2p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(-2)\otimes p_2^*(\mathscr{E}\otimes\Omega^3(2))\right). \tag{10}$$

Первый и последний ее члены равны нулю, ибо $H^i(\mathscr{E}\otimes\Omega^3(2))\simeq H^i(\mathscr{E}(-2))=0$ при $i=1, 2$ в силу допустимости $\mathscr{E}$. Поэтому средние члены (10) определяют функториальный по $\mathscr{E}$ изоморфизм:

$$R^1_{p_{1*}}\left(\mathscr{K}\otimes p_2^*\mathscr{E}\right)=H^1(\mathscr{E}\otimes\Omega^2(1))\otimes\mathcal{O}(-1). \tag{11}$$

Третий пучок. Он вычисляется непосредственно:

$$R^1p_{1*}\left(p_2^*\mathscr{E}\otimes\Omega^1\right)=H^1(\mathscr{E}\otimes\Omega^1)\otimes\mathcal{O}. \tag{12}$$

Четвертый пучок. Конец резольвенты $K.\otimes p_2^*\mathscr{E}\to \to\mathcal{O}_\Delta\otimes p_2^*\mathscr{E}$ имеет вид

$$0\to J\otimes p_2^*\mathscr{E}\to p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes p_2^*(\mathscr{E}(-1))\to\mathcal{O}_\Delta\otimes p_2^*\mathscr{E}\to 0.$$

Он доставляет точную последовательность

$$p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes p_2^*\mathcal{E}(-1)\right)\to p_{1*}\left(\mathcal{O}_\Delta\otimes p_2^*\mathcal{E}\right)\to$$
$$\to R^1p_{1*}\left(J\otimes p_2^*\mathcal{E}\right)\to R^1p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes p_2^*\mathcal{E}(-1)\right)\to$$
$$\to R^1p_{1*}\left(\mathcal{O}_\Delta\otimes p_2^*\mathcal{E}\right). \quad (13)$$

Первый член здесь обращается в нуль, ибо $H^0(\mathcal{E}(-1))=0$. Второй и пятый вычисляются из того соображения, что $p_1|\Delta$: $\Delta\to P$ есть изоморфизм, и потому $R^i_{p_{1*}}(\mathcal{H})=0$ при $i>0$ для любого $\mathcal{O}_\Delta$-пучка $\mathcal{H}$. Следовательно, последний член (13) нулевой, а второй функториально изоморфен $\mathcal{E}$. Наконец, четвертый член (13) функториально изоморфен $H^1(\mathcal{E}(-1))\otimes\mathcal{O}(1)$. Окончательно, (13) дает функториальную по $\mathcal{E}$ точную последовательность

$$0\to\mathcal{E}\to R^1p_{1*}\left(J\otimes p_2^*\mathcal{E}\right)\to H^1(\mathcal{E}(-1))\otimes\mathcal{O}(1)\to 0. \quad (14)$$

Пятый пучок. Он определяется из продолжения точной последовательности (10):

$$R^2p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(-1)\otimes p_2^*(\mathcal{E}\otimes\Omega^2(1))\right)\to R^2p_{1*}\left(\mathcal{K}\otimes p_2^*\mathcal{E}\right)\to$$
$$\to R^3p_{1*}\left(p_1^*\mathcal{O}(-2)\otimes p_2^*(\mathcal{E}\otimes\Omega^3(2))\right).$$

Третий член здесь равен нулю, потому что $H^3(\mathcal{E}\otimes\Omega^3(2))\simeq H^3(\mathcal{E}(-2))=0$ в силу допустимости $\mathcal{E}$. Чтобы установить обращение в нуль и первого члена, достаточно убедиться, что $H^2(\mathcal{E}\otimes\Omega^2(1))=0$. Эта группа когомологий вычисляется так: умножим стандартную точную последовательность $0\to\Omega^3(3)\to\Lambda^3T^*\otimes\mathcal{O}\to\Omega^2(3)\to 0$ на $\mathcal{E}(-2)$ и рассмотрим точную последовательность когомологий $H^2(\Lambda^3T^*\otimes\mathcal{E}(-2))\to H^2(\mathcal{E}\otimes\Omega^2(1))\to H^3(\Omega^3(1))$. Крайние члены ее равны нулю. Окончательно,

$$R^2p_{1*}\left(\mathcal{K}\otimes p_2^*\mathcal{E}\right)=0. \quad (15)$$

Теперь мы можем подставить в (8) отождествления (9), (11) и (15). Получится функториальная по $\mathcal{E}$ точная последовательность пучков

$$0\to H^1(\mathcal{E}\otimes\Omega^2(1))\otimes\mathcal{O}(-1)\to H^1(\mathcal{E}\otimes\Omega^1)\otimes\mathcal{O}\to$$
$$\to R^1p_{1*}\left(J\otimes p_2^*\mathcal{E}\right)\to 0.$$

Заменим в ней третью стрелку ее композицией с третьей стрелкой последовательности (14). Мы получим монаду и изоморфизм ее пучка когомологий с $\mathscr{E}$, существование которых утверждается в начале доказательства.

Теперь мы можем приступить к завершающему этапу доказательства теоремы 7: переводу монадного описания на язык данных линейной алгебры, с учетом дополнительных инстантонных структур.

23. Скалярное произведение. Мы интерпретируем комплексное симметричное скалярное произведение на $\mathscr{E}_Z$ как симметричный изоморфизм $\mathscr{E}_Z \to \mathscr{E}^*_Z$. Учитывая, что категория монад также снабжена функтором $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^*$, причем $\mathscr{E}(\mathscr{F}^*) \simeq \mathscr{E}(\mathscr{F})^*$, получаем, что скалярное произведение на $\mathscr{E}(\mathscr{F})$ индуцировано симметричным изоморфизмом Φ: $\mathscr{F} \rightleftarrows \mathscr{F}^*$ соответствующих монад.

Монаду, снабженную таким изоморфизмом, можно задать с помощью диаграммы линейных пространств

$$F_{-1} \otimes T \xrightarrow{\alpha} F_0 \simeq F_0^* \xrightarrow{\alpha^*} F_{-1}^* \otimes T^*,$$

где средний изоморфизм отвечает билинейной форме Q, индуцированной Φ на F_0. В обозначениях п. 4 для любой гиперплоскости $D \subset T^*$ ядро α_D^*: $F_0^* \to F_{-1}^* \otimes T^*/D$ совпадает с ортогональным (относительно Q) дополнением к образу α_D: $F_{-1} \otimes (T^*/D)^* \to F_0$. Стало быть, все эти образы должны быть Q-изотропны, и слой расслоения $E(\mathscr{F})$ над точкой $z \in P$, отвечающей D, канонически изоморфен $(\operatorname{Im} \alpha_D)^{\perp}/\operatorname{Im} \alpha_D$.

Заметим, что числа Чженя допустимого пучка с симметричной билинейной формой легко вычисляются по его монаде: $c_1(\mathscr{E}) = c_3(\mathscr{E}) = 0$, $c_2(\mathscr{E}) = \dim F_{-1}$; кроме того, $\operatorname{rk} \mathscr{E} = \dim F_0 - 2 \dim F_{-1}$.

24. Вещественная структура. Антилинейное отображение σ: $\mathscr{E}_Z \to \mathscr{E}_Z$, продолжающее вещественную структуру на P, переносится на монаду, поскольку ее конструкция в предложении 21, очевидно, функториальна и относительно таких отображений (можно, например, вычислять все нужные пространства когомологий с помощью σ-инвариантных покрытий по Чеху). Далее, вещественная структура на монаде, индуцирующая данную вещественную структуру на $\mathscr{E}_Z$, единственна. В самом деле, если σ' — другая такая структура, то композиция $\sigma(\sigma - \sigma')$ является линейным эндоморфизмом монады, индуцирующим нулевой эндоморфизм $\mathscr{E}_Z$. Поэтому $\sigma - \sigma' = 0$ в силу предложения 21. Аналогично, $\sigma^2 = 1$, ибо это так на $\mathscr{E}_Z$.

Отсюда следует, что σ индуцирует вещественную структуру на пространстве $F_0 = H^1(\mathscr{E} \otimes \Omega^1)$ монады. Положим $F^c = \{f \in F_0 | \sigma f = f\}$. Тогда $F_0 = F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$, $F_0 \underset{\mathbf{C}}{\otimes} T^* = F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} T^*$, и первая стрелка монады $0 \to F_{-1} \otimes \mathcal{O}(-1) \to F_0 \otimes \mathcal{O}$ определяет вложение $F_{-1} \subset F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} T^*$.

25. Форма Q на F^0. Ортогональная метрика на инстантонном пучке $\mathscr{E}_0$, билинейно продолженная на $\pi^*(\mathscr{E}_0 \otimes \mathbf{C})$ и ограниченная затем на $\mathscr{E}_Z$, индуцирует, как мы уже установили, невырожденную квадратичную форму на F_0. Действуя σ на ее аргументы, получаем комплексно-сопряженное значение. Следовательно, ее ограничение на F^0 является вещественной невырожденной квадратичной формой Q.

Этим завершается построение ортогональных данных линейной алгебры по $\mathcal{O}(r)$-инстантону $\mathscr{E}_0$. Читателю должно быть уже очевидно, что операторы J, J_1, J_2 унитарной и симплектической структуры точно так же переносятся на монаду и затем на F^0.

26. Реконструкция инстантона. Нам осталось проверить, что способ восстановления (E_0, ∇) по данным линейной алгебры, описанный в п. 5, возвращает нас к исходной точке.

Слой $E_0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$ над точкой $x \in S^4$ канонически изометричен пространству голоморфных сечений ограничения $\mathscr{E}_Z$ на $\pi^{-1}(x)$: именно таково определение обратного преобразования Радона — Пенроуза в § 2. Обозначим это ограничение через $\mathscr{E}(x)$; аналогично будем обозначать ограничения других пучков на P. Монада $\mathscr{E}_Z$, ограниченная на $\pi^{-1}(x)$, дает две точные последовательности $0 \to (F_{-1} \otimes \mathcal{O}(-1))(x) \to \mathscr{K}(x) \to \to \mathscr{E}_Z(x) \to 0$ и $0 \to \mathscr{K}(x) \to (F_0 \otimes \mathcal{O})(x) \xrightarrow{\alpha^*(x)} F_{-1}^* \otimes \mathcal{O}(1) \to 0$, которые определяют изоморфизмы

$$H^0(\mathscr{E}_Z(x)) \simeq H^0(\mathscr{K}(x)) \simeq$$

$$\simeq \operatorname{Ker}\left(F_0 \xrightarrow{\alpha^*(x)} F_{-1}^* \otimes \Gamma(\pi^{-1}(x), \mathcal{O}(1)\right).$$

Если точка $x \in S^4$ отвечает вещественной плоскости $D \subset T^*$, то $\Gamma(\pi^{-1}(x), \mathcal{O}(1))$ канонически отождествляется с T^*/D, а $\operatorname{Ker} \alpha^*(x)$ — с подпространством $[\operatorname{Im} F_{-1} \otimes (T^*/D)^*]^{\perp} = F_D^{\perp} \subset F_0$ в силу автодвойственности монады. Поскольку ранг $\mathscr{E}_Z$ равен $\dim F_0 - 2 \dim F_D^{\perp}$, мы должны иметь

$$\dim F_D = \dim F_0 - 2 \dim F_D^{\perp} = 2 \dim F_{-1}.$$

Наконец, слой E_0 над x состоит из σ-инвариантных элементов слоя $E_0 \otimes \mathbf{C}$, т. е. отождествляется с $F_D^{\perp} \cap F^0$. Поэтому ограничения Q на такие подпространства должны быть положительно определены.

Более точно, предыдущие рассуждения показывают, что для любой σ-инвариантной плоскости $D \subset T^*$ и содержащей ее гиперплоскости B канонические отображения $F_D^{\perp} = (F_B + F_{\sigma B})^{\perp} \to F_B^{\perp}/F_B$ являются изометриями. Поэтому прямое слагаемое тривиального ортогонального расслоения $S^4 \times F_0$, слой которого над D есть $F_D^{\perp}$, после подъема на P канонически отождествляется с $\pi^*(E_0 \otimes \mathbf{C})$ с сохранением всех дополнительных структур (метрика, σ, J, J_1, J_2). Значит, это расслоение изоморфно $E_0 \otimes \mathbf{C}$. Автодуальная связность ∇, приводящая к данной голоморфной структуре, очевидно, единственна. Поэтому для ее отождествления с проекцией тривиальной связности на $S^4 \times F_0$ достаточно проверить автодуальность этой последней. Это несложное вычисление здесь опущено.

В заключение этого параграфа мы докажем теорему о положительности: утверждение об эквивалентности условий в) и в′) п. 4.

Она важна, потому что практически условие в′) много естественнее и легче поддается проверке.

27. Теорема. *Пусть* F^0 — *конечномерное вещественное пространство с невырожденной квадратичной формой* Q, $F_{-1} \subset F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} T^*$ *комплексное подпространство, инвариантное относительно* $\mathrm{id}_{F^0} \otimes \sigma$. *Тогда из условий* б), в), п. 4 *вытекает, что* $Q > 0$.

Доказательство. Продолжим Q до эрмитовой формы $\langle\ ,\ \rangle$ на $F_0 = F^0 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$ формулой $\langle f, f\rangle = Q((\mathrm{id} \otimes \sigma)f, f)$. Вместо вложения $F_{-1} \to F_0 \otimes T^*$ будем рассматривать отображение φ: $F_{-1} \otimes T \to F_0$ и обозначать тем же символом $\langle\ ,\ \rangle$ индуцированную форму на $F_{-1} \otimes T$.

Выберем в T базис ε_a, $a = 1, 2, 3, 4$, отвечающий координатам $z_1, \ldots, z_4$, которыми мы пользовались до сих пор. Точке $z = (z_1 : \ldots : z_4) \in P$ отвечает гиперплоскость D_z: $\sum_{a=1}^{4} z_a \varepsilon_a = 0$ в T^*.

Для любого вектора $e \in F_{-1}$ положим $e_a = e \otimes \varepsilon_a$, $e_z = \sum_{a=1}^{4} e_a z_a$, $F_z = \{ez \mid e \in F_{-1}\} \subset F_{-1} \otimes T$. Пространство F_z определяется точкой $z \in P$. Поскольку для любого $l \in T$ имеем

$(\mathrm{id}\otimes l)(e)=\varphi(e\otimes l)\in F_0$, пространство $F_{D_z}\subset F_0$ совпадает с φ-образом пространства $F_z\subset F_{-1}\otimes T$. В силу определения эрмитовой формы изотропность F_{D_z} относительно Q равносильна ортогональности F_z и $F_{\sigma z}$ в метрике $\langle\ ,\ \rangle$.

Любую σ-инвариантную плоскость $B\subset T^*$ можно представить в виде $D_z\cap D_{\sigma z}$ для подходящей точки $z\in P$. Согласно предыдущему рассуждению $F_B=\varphi(F_z+F_{\sigma z})$. Поэтому из равенства $\dim F_B=2\dim F_{-1}$ следует, что φ инъективно на подпространствах F_z и что $F_z\cap F_{\sigma z}=\{0\}$. Кроме того, на $F_z+F_{\sigma z}$ метрика невырождена.

Из условия $Q\,|\,F_B^{\perp}\cap F^0>0$ для всех вещественных плоскостей B следует, что $\langle\ ,\ \rangle$ положительно полуопределена на всех подпространствах $(F_z+F_{\sigma z})^{\perp}$ (эрмитово ортогональное дополнение).

Пусть $\pi(z)=x\in\mathbf{R}^4=S^4\setminus\{\infty\}$. Поставим в соответствие точке x матрицу, определенную в п. 6, но обозначим теперь ее X_2 (повод будет ясен позже):

$$X_2=\begin{pmatrix}x_4+ix_3 & -x_2+ix_1\\ x_2+ix_1 & x_4-ix_3\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Из описания π в п. 6 ясно, что $F_z+F_{\sigma z}=F_{-1}\otimes P_x$, если $\pi(z)=x$.

Выберем в F_{-1} базис $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ и положим $e_{ka}=e_k\otimes\varepsilon_a$. Это — базис в $F_{-1}\otimes T$, который мы упорядочим так: $(e_{11},\ \ldots$ $\ldots,\ e_{n1};\ \ldots;\ e_{14},\ \ldots,\ e_{n4})$.

28. **Лемма.** *Условие* $\langle F_z,\ F_{\sigma z}\rangle=0$ *равносильно следующим свойствам симметрии матрицы Грама базиса* (e_{ka}):

$$\Phi=\begin{pmatrix}A & D^+\\ D & R\end{pmatrix},$$

где

$$A=\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & A_n\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}R_n & 0\\ 0 & R_n\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}B & C\\ -C^+ & B^+\end{pmatrix},$$

$$A^+=A,\quad R^+=R,$$

(+ *означает эрмитово сопряжение.*) ■

Проверка этого производится непосредственно.

Блок A представляет собой матрицу Грама базиса подпространства $F_{-1}\otimes\varepsilon_1+F_{-1}\otimes\varepsilon_2=F_{-1}\otimes P_\infty$. Поскольку φ вкладывает его в F_0 и метрика на $\varphi(F_{-1}\otimes P_\infty)$ невырождена, имеем $\det A\neq 0$. Ниже мы покажем, что $A>0$. С учетом положительной полуопределенности $\langle\ ,\ \rangle$ на $(F_{-1}\otimes P_\infty)^{\perp}$ отсюда будет следовать, что $\Phi \geqslant 0$, т. е. $\langle\ ,\ \rangle > 0$ на F_0 (ибо на F_0 метрика невырождена) и, окончательно, $Q > 0$ на F^0.

Положим

$$X = \overline{X}_2 \otimes E_n = \begin{pmatrix} (x_4 - ix_3) E_n & -(x_2 + ix_1) E_n \\ (x_2 - ix_1) E_n & (x_4 + ix_3) E_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, строки матрицы $(\overline{X}, E_{2n})$ образуют базис подпространства $F_{-1} \otimes P_x$, записанный в координатах относительно базиса (e_{ka}) пространства $F_{-1} \otimes T$. Добавим к нему строки матрицы $(E_{2n}, 0)$ и вычислим новую матрицу Грама получившейся системы векторов:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E_{2n} & 0 \\ X & E_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D^+ \\ D & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2n} & X^+ \\ 0 & E_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & D^+(x) \\ D(x) & R(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь $D(x) = D + AX$, $R(x) = |x|^2 A + DX^+ + XD^+ + R$. Поскольку метрика на $F_{-1} \otimes P_x$ невырождена, $\det R(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^4$. Из формулы

$$\left(E_{2n}, -D^+(x) R(x)^{-1}\right) \Phi' \begin{pmatrix} 0 \\ E_{2n} \end{pmatrix} = 0$$

вытекает, что строки матрицы $(E_{2n}, -D^+(x)\overline{R}(x)^{-1})$ представляют базис пространства $(F_{-1} \otimes P_x)^\perp$, записанный в координатах относительно базиса, состоящего из строк матрицы $\begin{pmatrix} E_{2n} & 0 \\ \overline{X} & E_{2n} \end{pmatrix}$. Соответствующая матрица Грама равна $A - D^+(x)R(x)^{-1}D(x)$. Она полуопределена в силу сделанных предположений.

29. **Лемма.** $\sum_{a=1}^{4} \partial_a^2 R(x)^{-1} \leqslant 0$.

Доказательство. В силу эрмитовости и невырожденности $R(x)$ достаточно проверить, что

$$S(x) = -R(x) \left(\sum_{a=1}^{4} \partial_a^2 R(x)^{-1} \right) R(x) \geqslant 0.$$

Имеем

$$S(x) = \sum_{a=1}^{4} \partial_a^2 R(x) - 2\partial_a R(x) R(x)^{-1} \partial_a R(x).$$

Мы покажем, что

$$S(x) = 4T(A - D^+(x)R(x)^{-1}D(x)),$$

где оператор T на $(2n \times 2n)$-матрицах определяется формулой

$$T\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}+Z_{22} & 0 \\ 0 & Z_{11}+Z_{22} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что T переводит полуопределенные матрицы в полуопределенные, так что лемма будет отсюда следовать.

Положим $\Sigma_a = \partial_a X$. Из формулы (16) и свойств матрицы Паули следует, что $\Sigma_a\Sigma_b^+ + \Sigma_b\Sigma_a^+ = 2\delta_{ab}E_{2n}$. Кроме того, $D = \sum_{a=1}^{4} D_a\Sigma_a$, где

$$D_1 = \frac{C-C^+}{2i}\otimes E_2, \quad D_2 = -\frac{C+C^+}{2}\otimes E_2,$$

$$D_3 = \frac{B-B^+}{2i}\otimes E_2, \quad D_4 = \frac{B+B^+}{2}\otimes E_2.$$

Отсюда вытекает, что

$$R(x) = |x|^2 A + 2\sum_{a=1}^{4} x_a D_a + R.$$

В частности, $R(x)$ имеет вид $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Таким образом,

$$S(x) = 8A - 4\sum_{a=1}^{4}(x_a A + D_a)\,R(x)^{-1}(x_a A + D_a),$$

$$T\left(A - D^+(x)\,R(x)^{-1}D(x)\right) =$$

$$= 2A - \sum_{a,b=1}^{4}(x_a A + D_a)\,R(x)^{-1}(x_b A + D_b)\,\Sigma_a^+\Sigma_b,$$

и лемма следует отсюда, поскольку $T\left(\Sigma_a^+\Sigma_b\right) = 2\delta_{ab}E_{2n}$. ■

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы о положительности. На сфере большого радиуса r в $\mathbf{R}^4$ имеем асимптотически $\partial_a R(x)^{-1} = -2x_a r^{-4}A^{-1} + O(r^{-4})$. Вычислив интеграл $\int\limits_{|x|<r} d^4x \sum_{a=1}^{4}\partial_a^2 R(x)^{-1}$ по формуле Стокса, находим $A^{-1} > 0$. Отсюда $A > 0$, что и требовалось. ■

§ 4. Инстантоны и модули над грассмановой алгеброй

1. Специальные модули и монады. Пусть $P = P(T)$ и, как выше,

$$\mathcal{F}\colon\ 0 \to F_{-1}\otimes\mathcal{O}_P(-1) \xrightarrow{\alpha} F_0\otimes\mathcal{O}_P \xrightarrow{\beta} F_1\otimes\mathcal{O}_P(1) \to 0 \qquad (1)$$

— некоторая специальная монада на P. Рассмотрим градуированное линейное пространство $F = F_{-1} \oplus F_0 \oplus F_1$ и определим на нем действие T следующим образом: это действие является однородным билинейным отображением степени 1:

$$T \otimes F_i \to F_{i+1}, \quad \xi \otimes f \mapsto \xi f, \qquad (F_{\geqslant 2} = \{0\}),$$

причем $T \otimes F_{-1} \to F_0$ является дуализацией по T отображения $\Gamma(\alpha(1))$: $F_{-1} \to F_0 \otimes T^*$, а $T \otimes F_0 \to F_1$ является дуализацией по T отображения $\Gamma(\beta)$: $F_0 \to F_1 \otimes T^*$. Из $\beta\alpha = 0$ следует, что $\xi^2 f = \xi(\xi f) = 0$ для всех $\xi \in T$, $f \in F$. Поэтому описанное действие однозначно продолжается до структуры градуированного $\Lambda(T)$-модуля на F. Модули, отвечающие специальным монадам (1), мы также будем называть специальными. Они характеризуются двумя условиями: а) $F_i = \{0\}$ при $|i| > 1$; б) если $\xi \in T$, $\xi \neq 0$, то умножение на ξ определяет инъективное отображение ξ: $F_{-1} \to F_0$ и сюръективное отображение ξ: $F_0 \to F_1$.

Очевидно, категория специальных $\Lambda(T)$-модулей (с отображениями нулевой степени в качестве морфизмов) эквивалетна категории специальных монад. Последняя в силу предложения 22 § 3 эквивалентна категории допустимых пучков, содержащей инстантоны.

Наша ближайшая цель — использовать новое описание допустимых пучков для того, чтобы охарактеризовать инстантоны $(\mathscr{E}_0, \nabla)$ особенностями связности ∇, аналитически продолженной на свою максимальную область существования в $G(2;\ T)$. Разумеется, из результатов § 3 следует, что инстантон по существу является алгебраическим объектом, так что такое аналитическое продолжение и его особенности характеризуются чисто алгебраически. Кроме того, вещественная структура и метрика не существенны здесь, так что наши результаты будут относиться к следующему подклассу допустимых пучков.

2. Аналитические инстантоны и монады. Назовем аналитическим инстантоном любой допустимый пучок $\mathscr{E}_Z$ на $P(T)$ со следующим свойством: через любую точку $P(T)$ проходят прямая, ограничение $\mathscr{E}_Z$ на которую тривиально. Обычные инстантоны удовлетворяют этому условию, ибо через любую точку $P(T)$ проходит вещественная прямая.

Пусть $\mathscr{E}_Z$ — аналитический инстантон, $U \subset G(2;\ T)$ — открытое по Зарискому множество точек, отвечающее всем прямым в $P(T)$, ограничение $\mathscr{E}_Z$ на которые тривиально. Дополнение к U назовем особым множеством для $\mathscr{E}_Z$. Пусть α-плоскость в $G(2; T)$ называется множество точек, параметризующих прямые, проходящие через фисированную точку $P(T)$; тогда, очевидно, особое множество аналитического инстантона не содержит ни одной α-плоскости.

Мы снабдим особое множество каноническим пучком, по которому $\mathscr{E}_Z$ уже однозначпо определяется. С этой целью введем следующее понятие.

Менадой ранга d называется инъективный морфизм пучков на $M = G(2; T)$ вида $\mathcal{O}_M^d \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_M^d(1)$ (где $\mathcal{O}(1) = \Lambda^2\mathscr{S}^*$ — пучок, определяющий вложение Плюккера). Пучок $\mathscr{D} = \operatorname{Coker}\gamma$ назовем пучком особенностей менады.

3. Теорема. *Следующие категории эквивалентны:*

а) *категория аналитических инстантонов, не имеющих глобальных сечений (кроме нулевого);*

б) *категория менад, носитель пучка особенностей которых не содержит ни одной α-плоскости;*

в) *категория пучков особенностей таких менад.*

При этом соответствии особое множество инстантона является носителем пучка особеностей отвечающей ему менады, а ранг менады равен второму числу Чженя инстантона.

Доказательство. Мы разобьем доказательство на шаги, каждый из которых отвечает конструкции одного из функторов, устанавливающих эквивалентности категорий.

От инстантонов к менадам. Построим по аналитическому инстантону $\mathscr{E}_Z$ отвечающую ему монаду (1), как в § 3, затем по монаде $\Lambda(T)$-модуль, как в п. 1, наконец, по $\Lambda(T)$-модулю морфизм пучков

$$F_{-1} \otimes \mathcal{O}_M \xrightarrow{\gamma} F_1 \otimes \mathcal{O}_M(1),$$

где γ определяется тем, что отображение $\Gamma(\gamma)$: $F_{-1} \to F_1 \otimes \otimes \Lambda^2 T^*$ двойственно к умножению $\Lambda^2 T \otimes F_{-1} \to F_1$.

Мы должны проверить, что γ инъективен, а его коядро сосредоточено на особом множестве $\mathscr{E}_Z$.

Выясним спачала, как по монаде вычислить пространство сечений соответствующего расслоения. Рассмотрим комплекс вида (1) на проективном пространстве любой размерности и распишем его в виде двух точных последовательностей, введя $\mathscr{K} = \operatorname{Ker}\beta$. Из первой последовательности найдем: $H^0(\mathscr{E}_Z) = H^0(\mathscr{K})$. Вторая последовательность отождествляет обе эти группы с ядром отображения $\Gamma(\beta)$: $F_0 \to F_1 \otimes T^*$. В терминах соответствующего $\Lambda(T)$-модуля получаем

$$H^0(\mathscr{E}_Z) = \{f_0 \in F_0 \mid \xi f_0 = 0 \text{ для всех } \xi \in T\}. \qquad (2)$$

В частности, для аналитического инстантона без сечений это ядро тривиально. Применив (2) к ограничению (1) на прямую $P(\mathscr{S}(x))$, $\mathscr{S}(x) \subset T$ — любая плоскость, получаем

$$H^0(\mathscr{E}_Z | P(\mathscr{S}(x))) = \{f_0 \in F_0 | \xi f_0 = 0 \text{ для всех } \xi \in \mathscr{S}(x)\}. \quad (3)$$

Положим $d_i = \dim F_i$. Согласно (3) пространство сечений $\mathscr{E}_Z$ над $P(\mathscr{S}(x))$ является пересечением двух подпространств $\operatorname{Ker} \xi_1$ и $\operatorname{Ker} \xi_2$ в F_0, где ξ_1, ξ_2 образуют базис $\mathscr{S}(x)$. Так как отображения ξ_i: $F_0 \to F_1$ сюръективны, размерности этих подпространств равны $d_0 - d_1$. Поэтому размерность их пересечения не меньше $d_0 - 2d_1$. Кроме того, ранг $\mathscr{E}_Z$ равен $d_0 - d_1 - d_{-1}$.

Для того чтобы пучок $\mathscr{E}_Z$ был аналитическим инстантоном, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: в каждой α-плоскости есть такая точка x, что $\dim H^0(\mathscr{E}_Z | P(\mathscr{S}(x))) = \operatorname{rk} \mathscr{E}_Z$, и ни одно сечение $\mathscr{E}_Z$ над $P(\mathscr{S}(x))$ не обращается в нуль. В самом деле, это равносильно тривиальности $\mathscr{E}_Z | P(\mathscr{S}(x))$. По предыдущему анализу указанные условия означают, что $d_1 = d_{-1}$ и что подпространства $\operatorname{Ker} \xi_1$ и $\operatorname{Ker} \xi_2$ в F_0 находятся в общем положении. Но если $d_1 = d_{-1}$, то в особых точках $x \notin U$ ранг $\mathscr{E}_Z | P(\mathscr{S}(x))$ может только стать меньше размерности пространства сечений, а это возможно лишь при наличии сечений, обращающихся в нуль. Поэтому вместо $H^0(\mathscr{E}_Z | P(\mathscr{S}(x))) = \operatorname{rk} \mathscr{E}_Z$ можно постулировать $d_1 = d_{-1}$.

Далее, сечение $\mathscr{E}_Z | P(\mathscr{S}(x))$, отвечающее вектору $f_0 \in F_0$ в силу отождествления (3), обращается в нуль в точке, отвечающей $\eta \in \mathscr{S}(x)$, если и только если $f_0 = \eta f_{-1}$ для некоторого $f_{-1} \in F_{-1}$. Иными словами, пусть $\xi \wedge \eta \in \Lambda^2 T$ — бивектор, соответствующий $\mathscr{S}(x)$. Тогда $P(\mathscr{S}(x))$ есть особая прямая для $\mathscr{E}_Z$ в том и только том случае, когда ядро умножения $\xi \wedge \eta$: $F_{-1} \to F_1$ нетривиально. Поскольку $d_1 = d_{-1}$, вместо ядра можно говорить о коядре, а оно нетривиально как раз в точках носителя пучка $\mathscr{D} = \operatorname{Coker}\left(F_{-1} \otimes \mathcal{O}_M \xrightarrow{\nu} F_1 \otimes \mathcal{O}_M(1)\right)$ на M.

Нам осталось проверить, что носитель $\mathscr{D}$ не содержит α-плоскостей в M. Такая плоскость в M отвечает трехмерному линейному подпространству в $\Lambda^2 T$, целиком состоящему из разложимых бивекторов, а соответствующие ее точкам пространства $\mathscr{S}(x) \subset T$ все проходят через одну прямую в T.

Пусть ξ — твистор, лежащий на этой прямой, и пусть носитель $\mathscr{D}$ содержит соответствующую плоскость. Тогда ядро умножения на $\eta \wedge \xi$: $F_{-1} \to F_1$ для всех $\eta \in T$ нетривиально. Но это означает, что все прямые, проходящие через точку $P(T)$, отвечающую ξ, особые для $\mathscr{E}_Z$ вопреки определению аналитического инстантона.

Построенное отображение, очевидно, продолжается на морфизмы и потому является функтором. Заметим, что в его определении отсутствием ненулевых глобальных сечений у $\mathscr{E}_Z$ мы не пользовались.

От менад к инстантонам. Построим сначала по менаде $F_{-1}\otimes\mathcal{O}_M\xrightarrow{\gamma}F_1\otimes\mathcal{O}_M(1)$ градуированный $\Lambda(T)$-модуль $F'=$ $=F_{-1}\oplus(T\otimes F_{-1})\oplus F_1$ со следующим действием T. На F_{-1} это тождественный изоморфизм $T\otimes F_{-1}\to T\otimes F_{-1}=F'_0$; на F'_0 это композиция

$$T\otimes T\otimes F_{-1}\xrightarrow{\lambda\otimes\mathrm{id}}\Lambda^2T\otimes F_{-1}\xrightarrow{\gamma'}F_1,$$

где λ — антисимметризация, а γ' — дуализация (по Λ^2T^*) $\Gamma(\gamma)$. Для проверки того, что F' — специальный $\Lambda(T)$-модуль, достаточно установить, что умножение $\xi: F'_0\to F_1$ сюръективно при всех $\xi\neq 0$. Если это неверно для некоторого ξ, то для всех $\eta\in T$ отображение $\xi\wedge\eta$: $F_1\to F_1$ не будет сюръективным. Но это означало бы, что в носителе пучка особенностей менады содержится α-плоскость, что, по предположению, не так.

Однако у инстантона, отвечающего $\Lambda(T)$-модулю F', могут быть глобальные сечения, которые описываются формулой (2). Чтобы избавиться от них, следует заменить F' на $F=F'/K$, где

$$K=\{f_0\in F'_0=T\otimes F_{-1}\mid \xi f_0=0 \text{ для всех } \xi\in T\}.$$

Легко видеть, что F — специальный $\Lambda(T)$-модуль, отвечающий той же монаде. В частности, умножение ξ: $F_{-1}\to$ $\to F'_0/K=F_0$ не имеет ядра, так как иначе отвечающая ξ α-плоскость содержалась бы в носителе $\mathscr{D}$.

Таким образом, мы построили функтор в противоположную сторону.

Для проверки того, что эти функторы взаимно обратны, достаточно установить, что любой морфизм инстантонов без глобальных сечений однозначно восстанавливается по соответствующему отображению на компонентах $\Lambda(T)$-модулей степени -1 и 1, без учета степени 0. В свою очередь достаточно проверить, что отображение, равное нулю в степенях -1 и 1, равно нулю и в степени 0. Но такое отображение переводит всю нулевую компоненту начального модуля в ядро умножения на T в нулевой компоненте конечного модуля. При отсутствии сечений последнее равно нулю.

От пучков особенностей к менадам и обратно. Функтор из категории менад в категорию их пучков особенностей очевиден. Наоборот, чтобы по пучку особенностей $\mathscr{D}$ реконструировать соответствующую ему менаду, положим

$$F_1 = H^0(M, \mathscr{D}(-1)), \quad F_{-1} = \operatorname{Ker}\left(F_1 \otimes \mathcal{O}_M(1) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathscr{D}\right),$$

$$\gamma = \tilde{\gamma}(-1),$$

где $\tilde{\gamma}$ — тавтологическое отображение. Очевидно, что, начав с менады и построив $\mathscr{D}$, мы вернемся таким образом к менаде, которая канонически изоморфна исходной. Для проверки того, что эти функторы устанавливают эквивалентность категорий, достаточно убедиться, что они определяют биекцию между морфизмами монад и морфизмами их пучков особенностей. Но это почти очевидно: любой морфизм $\mathscr{D}' \to \mathscr{D}''$ однозначно поднимается до морфизма $F_1' = H^0(\mathscr{D}'(-1)) \to H^0(\mathscr{D}''(-1)) = F_1''$, который затем индуцирует на ядрах γ', γ'' однозначно определенный морфизм $F_{-1}' \to F_1''$.

4. Замечания. Главный недостаток теоремы 3 в том, что она не содержит независимой характеризации пучков особенностей менад. Некоторый шаг в этом направлении представляет собой следующая конструкция. Прежде всего, построим по менаде ранга d дивизор степени D на d-замкнутую подсистему коразмерности 1 в M, пучок идеалов которой является образом детерминантного морфизма:

$$\det(\gamma(-1))\colon \Lambda^d F_{-1} \otimes \mathcal{O}_M(-d) \to \Lambda^d F_1 \otimes \mathcal{O}_M.$$

Легко видеть, что D есть схемный носитель $\mathscr{D}$, т. е. $\mathscr{D}$ является пучком $\mathcal{O}_D$-модулей.

Пусть теперь $\mathscr{E}_Z$ — аналитический инстантон, отвечающий монаде. Предположим дополнительно, что на $\mathscr{E}_Z$ задано невырожденное скалярное произведение, представленное изоморфизмом $\mathscr{E}_Z \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_Z^* = \mathscr{H}om(\mathscr{E}_Z, \mathcal{O}_P)$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{E}_Z^*$ отвечает монада $\mathscr{F}^* = \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathcal{O}_P)$, которой в свою очередь отвечает менада $\tilde{\mathscr{F}}^* = \mathscr{H}om(\tilde{\mathscr{F}}, \mathcal{O}_M(1)) = \mathscr{H}om(\tilde{\mathscr{F}}, \Omega^4 M(5))$ (здесь $\mathscr{H}om$ — это комплекс пучков морфизмов). Наконец, на пучках особенностей получаем

$$\mathscr{D}^* = \mathscr{H}om(\mathscr{D}, \omega_D(5)),$$

где ω_D — дуализирующий пучок дивизора особенностей D. Поэтому невырожденное скалярное произведение $\mathscr{E}_Z \times \mathscr{E}_Z \to \mathcal{O}_P$ превращается в невырожденное скалярное произведение $\mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \omega_D$ (5) на D. Если D приведен и неприводим, то $\omega_D(5) = \mathcal{O}_D(d+1)$, где $d = d_{\pm 1} = c_2(\mathscr{E}_Z)$. Однако задача описания таких D, возникающих из инстантонов, и пучков D на них не решена.

5. **Пример.** Пусть $d = 1$. Тогда инстантонные монады находятся в биекции с гладкими гиперплоскими сечениями D квадрики Клейна $M \subset P(\Lambda^2 T)$: соответствующая монада изоморфна комплексу $\mathcal{O}_M \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_M(1)$, где γ — умножение на уравнение D. Если бы D не был гладким, то соответствующая гиперплоскость касалась бы M в некоторой точке x и высекала бы световой конус этой точки; но любой световой конус содержит α-плоскости.

Обозначив через D' гиперплоскость в $\Lambda^2 T$, образ которой в $P(\Lambda^2 T)$ высекает D, мы можем записать монаду соответствующего инстантона в виде $0 \to \mathcal{O}_P(-1) \to T \otimes \mathcal{O}_P \to (\Lambda^2 T/D') \otimes \mathcal{O}_P(1) \to 0$. На языке $\Lambda(T)$-модулей это $\Lambda(T)/(D' \oplus \Lambda^3 T \oplus \Lambda^4 T)$.

Пространством параметров аналитических инстантонов с $d = 1$ является, таким образом, аффинное многообразие $P(\Lambda^2 T^*) \setminus M^*$, где M^* — квадрика, двойственная к M.

Ранг любого такого инстантона равен двум. Добавив условие вещественности и отсутствие особенностей на S^4, получаем следующие ограничения на дивизоры D:

а) D веществен;

б) $D \cap S^4 = \varnothing$.

Заметим, что при $\operatorname{rk} \mathscr{E}_Z = 2$ на $\mathscr{E}_Z$ имеется вещественное скалярное антисимметричное произведение $\mathscr{E}_Z \otimes \mathscr{E}_Z \to \Lambda^2 \mathscr{E}_Z \simeq \mathcal{O}_P$, что определяет редукцию структурной группы до $\mathrm{Sp}(1)$. Таким образом, мы получили геометрическое описание пространства модулей $\mathrm{Sp}(1)$-инстантонов с $c_2 = 1$. Приложив некоторые усилия, его можно распространить на случай $c_2 = 2$.

6. **Скалярное произведение и вещественная структура на $\Lambda(T)$-модулях.** Пусть $F = F_{-1} \oplus F_0 \oplus F_1$ — специальный $\Lambda(T)$-модуль, отвечающий $\mathrm{O}(r)$-инстантону. Переведем на язык этой структуры данные линейной алгебры из п. 3.4. Получится следующий набор отображений.

а) Невырожденное билинейное скалярное произведение (f, g) на F. Чтобы сформулировать его свойства, будем писать $\tilde{f} = i$ при $f \in F_i$. Тогда для однородных элементов $f, g \in$

$\in F$ имеем

$$(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{f} + \tilde{g} \neq 0, \\ (-1)^{\tilde{f}\tilde{g}}\,(g, f), & \text{если } \tilde{f} + \tilde{g} = 0, \end{cases}$$

$$(\xi f, g) = (-1)^{f}(\tilde{f}, \xi g), \quad \xi \in T.$$

б) Антилинейное отображение $\sigma\colon F \to F$ со свойствами:

$$(\sigma f)^{\sim} = \tilde{f}, \quad \sigma^2(f) = (-1)^{\tilde{f}} f, \quad \sigma(\xi f) = \sigma(\xi)\,\sigma(f),$$

$$(\sigma f, \sigma g) = \overline{(f, g)}.$$

(В §§ 5 и 6 гл. 3 будет объяснено, что эти аксиомы являются частным случаем естественных структур в суперкоммутативной алгебре: симметричного скалярного произведения и одной из супервещественных структур соответственно.)

в) Если $\xi \in T \backslash \{0\}$, $i \neq 0$, то $\mathrm{Im}(\xi\colon F_{i-1} \to F_i) = \mathrm{Ker}\,(\xi\colon F_i \to F_{i+1})$.

г) На вещественных (σ-инвариантных) элементах из F_0 скалярное произведение положительно определено.

Вообще, назовем грассмановым модулем конечномерный градуированный $\Lambda(T)$-модуль $F = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} F_i$ с данными и условиями а), б) и в). Назовем грассманов модуль инстантонным, если, сверх того, $F_i = \{0\}$ при $|i| > 1$ и выполнено условие г). Понятие инстантонного модуля эквивалентно понятию ортогональных данных линейной алгебры. Понятие грассманова модуля, являющееся несколько более общим, понадобится нам для того, чтобы научиться вычислять $\Lambda(T)$-модули инстантонов, отвечающих некоторым не фундаментальным представлениям ρ структурной группы. Точнее, мы покажем ниже, как по двум инстантонным $\Lambda(T)$-модулям вычислить инстантонный $\Lambda(T)$-модуль, отвечающий тензорному произведению исходных инстантонов.

7. Тензорное произведение грассмановых модулей. Пусть F', F'' — два грассмановых модуля. Положим:

$$(F' \otimes F'')_k = \bigoplus_{i+j=k} \left(F'_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} F''_j\right),$$

$$\xi\,(f' \otimes f'') = \xi f' \otimes f'' + (-1)^{\tilde{f}'} f' \otimes \xi f''; \qquad \xi \in T,\ f' \in F',\ f'' \in F'',$$

$$(f' \otimes f'', g' \otimes g'') = (-1)^{\tilde{f}''\tilde{g}'}\,(f', g')\,(f'', g''),$$

$$\sigma\,(f' \otimes f'') = \sigma f' \otimes \sigma f''.$$

Непосредственная проверка показывает, что все аксиомы грассманова модуля выполнены для $F' \otimes F''$. (Это — еще один образец «правила знаков» в суперкоммутативной алгебре: ср. § 1 гл. 3.)

Если модули F' и F'' были инстантонными, то $F' \otimes F''$ не будет инстантонным модулем, поскольку, например, $(F' \otimes F'')_{-2} = F'_{-1} \otimes F''_{-1} \neq \{0\}$. Оказывается, что эта помеха, по существу, является единственной.

8. **Теорема.** *Пусть F', F'' — два инстантонных модуля, и пусть $F = (\Lambda(T) \cdot (F'_{-1} \otimes F''_{-1}))^{\perp}$, где ортогональное дополнение построено по отношению к скалярному произведению в $F' \otimes F''$. Тогда F — инстантонный модуль, а отвечающий ему пучок $\mathcal{E}_Z$ изоморфен тензорному произведению пучков $\mathcal{E}'_Z$, $\mathcal{E}''_Z$, отвечающих F' и F'' соответственно.*

Доказательство. Пусть F' — любой грассманов модуль. Он определяет векторное расслоение $E(F')$ над $P(T)$ со слоем $\mathrm{Ker}(\xi\colon F_0 \to F_{-1})/\xi F_{-1}$ на точкой, отвечающей ξ. При этом, как нетрудно убедиться, $E(F' \otimes F'') = E(F') \otimes \otimes E(F'')$ (тензорное произведение расслоений).

Если F' и F'' — инстантонные модули, то $E(F' \otimes F'')$ — нужное нам тензорное произведение соответствующих инстантонных расслоений. Воспользуемся одной общей теоремой И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда и С. И. Гельфанда [5], из которой следует, что $E(F' \otimes F'') = E(F)$, где $F \subset \subset F' \otimes F''$ — инстантонный подмодуль, и $F' \otimes F'' = F \oplus P$, где $P \subset F' \otimes F''$ — некоторый свободный градуированный $\Lambda(T)$-подмодуль.

Покажем, что $P = N$, где $N = \Lambda(T) \cdot (F'_{-1} \otimes F''_{-1})$. Так как F — инстантонный модуль, $F_{-2} = 0$, так что P должен содержать N. С другой стороны, никакая из свободных образующих модуля P не может лежать вне $(F' \otimes F'')_{-2}$. В самом деле, однородные элементы степени > -2 в $F' \otimes F''$ аннулируются умножением на $\Lambda^4 T$, ибо $(F' \otimes F'')_k = 0$ при $k > 2$. Таким образом, $P = N$; в частности, N свободен над $\Lambda(T)$.

Из последнего утверждения вытекает, что размерность N_2 совпадает с размерностью $N_{-2} = (F' \otimes F'')_{-2}$. Скалярное произведение отождествляет $(F' \otimes F'')_{-2}$ с $(F' \otimes F'')_2^*$. Значит, $N_2 = (F' \otimes F'')_2$. Поэтому ортогональное дополнение $F = N^{\perp}$ не содержит элементов степени $i \neq 0$, 1, -1. Из того, что $(\xi f, g) = (-1)^{\tilde{f}}(f, \xi g)$, следует, что $N^{\perp}$ является $\Lambda(T)$-подмодулем. Так как σ переводит N в себя и $(\sigma f, \sigma g) =$

$=\overline{(f,\ g)}$, σ переводит в себя также F. Скалярное произведение на $F' \otimes F''$ индуцирует скалярное произведение на F. Окончательно, F является искомым инстантонным модулем. ■

§ 5. Диаграмма нуль-геодезических

1. Структура диаграммы. Диаграмма автодуальности, введенная в п. 2.6, существует лишь для пространства-времени, допускающего трехмерное семейство нулевых поверхностей. Общее пространство-время, определенное в § 1, ими не обладает. В этом параграфе мы введем в качестве замены двойное расслоение, одной из баз которого служит пространство нуль-геодезических, или комплексных световых лучей. Преобразование Радона — Пенроуза, основанное на диаграмме нуль-геодезических, обладает рядом возможностей, которые делают его интересным объектом изучения и в автодуальном, и даже в плоском случае. Этому изучению и посвящена оставшаяся часть главы.

Итак, пусть M — комплексное пространство-время, со структурами, описанными в п. 1.1. Вещественная структура здесь нас не будет интересовать: ее учет в доказываемых теоремах не представляет никаких трудностей. Выбор метрики в конформном классе, определенном спинорным разложением $\Omega^1 M = \mathcal{S}_+ \otimes \mathcal{S}_-$, определяет 1-коническую связность на $F = P(\mathcal{S}_+^*) \underset{M}{\times} P(\mathcal{S}_-^*)$, где F — 1-коническая структура нулевых направлений: именно, следует построить по метрике связность Леви-Чивиты и рассмотреть на F слоение поднятых нулевых геодезических $\mathcal{T}F/L$ относительно нее. Точно то же вычисление, что и в обычной дифференциальной геометрии, показывает, что смена метрики в конформном классе не меняет $\mathcal{T}F/L$. Мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{T}F/L$ интегрируемо до расслоения; тогда двойное расслоение

$$\begin{tikzcd} L & F \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & M \end{tikzcd}$$

будет называться диаграммой нуль-геодезических. Слои π_2 — это двумерные квадрики; слои π_1 — это листы слоения поднятых нуль-геодезических. Назовем M малым, если M штейново, геодезически выпукло для подходящей метрики в конформном классе, а слои π_1 связаны и односвязны. Любое пространство-время имеет базис из малых открытых множеств.

Плоская диаграмма нуль-геодезических — это двойное расслоение

$$L = F(1{,}3;\ T) \xleftarrow{\pi_1} F = F(1,\ 2,\ 3;\ T) \xrightarrow{\pi_2} M = G(2;\ T).$$

Напомним, что на всем M нельзя определить ненулевые сечения $\Lambda^2\mathcal{S}_{\pm}$.

В плоском случае на L имеется весьма важная дополнительная структура: замкнутое вложение $L \subset P(T) \times P(T^*)$, которое на языке функторов точек ставит в соответствие (1, 3)-флагу в T две его компоненты. Существование этого вложения связано с тем, что M одновременно автодуально и антиавтодуально: проекции $L \to P(T)$ и $L \to P(T^*)$ сопоставляют с нулевой геодезической одну из двух нулевых поверхностей, содержащих ее. Следовательно, в общем случае такого вложения нет. Между тем в механизме преобразования Радона — Пенроуза мы будем существенно пользоваться инфинитезимальными окрестностями $L^{(i)}$ при таком вложении. Возникает не решенная до конца задача их построения в общем искривленном случае. Эта задача разбивается на две: построить (ко)нормальный пучок вложения $L \subset L^{(1)}$, т. е. ядро I ограничения $\mathcal{O}_{L^{(1)}} \to \mathcal{O}_L$ как $\mathcal{O}_L$-модуль; построить расширение $\mathcal{O}_{L^{(i)}} \to \mathcal{O}_L$, фильтрованное степенями ядра так, что ассоциированный градуированный пучок колец будет симметрической алгеброй конормального пучка $\mathrm{mod}\, I^{i+1}$. Первая задача решается следующей конструкцией Ле Брена.

2. Пучок I. Обозначим через $I \subset \Omega^1 L$ пучок голоморфных форм ω со следующим свойством: ω обращается в нуль на каждом касательном векторе в каждом квадрике $L(x) = \pi_1\pi_2^{-1}(x)$, $x \in M$. Ниже мы докажем теорему Ле Брена о том, что I является локально прямым подпучком ранга 1. Читатель может проверить в качестве упражнения, что $I \simeq \mathcal{O}(-1,\ -1)$ в плоском случае. С другой стороны, L задается в $P(T) \times P(T^*)$ уравнением $s = \sum\limits_{i=1}^{4} t_i \otimes t^i = 0$, где (t_i), (t^i) — двойственные базисы в T^*, T, так что конормальный пучок вложения $L \subset P(T) \times P(T^*)$ тоже изоморфен $\mathcal{O}(-1,\ -1)$. Это — первый аргумент в пользу того, что I является правильным кандидатом на роль конормального подпучка $L \subset L^{(i)}$ в общем случае.

Геометрический смысл I таков. Пусть $l \subset F$ — некоторая нуль-геодезическая. Ее содержит трехмерное многообразие

$\pi_1^{-1}(l) \subset F$. Пусть для простоты M геодезически выпуклое. Тогда $l' \cap l$ либо пусто, либо состоит из одной точки для любой другой нуль-геодезической l'. Поэтому отображение $\pi_2\colon \pi_1^{-1}(l) \to L$ стягивает на этом многообразии в точку y подъем l, а больше ничего не склеивает. Следовательно, точка y, отвечающая l, является особой на образе этого многообразия. Поэтому касательное пространство Зариского к $\bigcup\limits_{L(x)\ni y} L(x)$ в точке y не может быть трехмерным: оно имеет размерность либо 4, либо 5. Но I есть как раз пучок уравнений этих касательных пространств; то, что он локально прям ранга 1, означает, что все касательные пространства четырехмерны.

Для подготовки к доказательству этой теоремы введем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{O}_F(a, b)$ — пучки на F, отвечающие реализации F в виде относительной квадрики $P(\mathcal{S}_+^*) \underset{M}{\times} P(\mathcal{S}_-^*)$. Как в п. 2.1, положим $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}\big(\mathrm{res}\colon \pi_2^*\Omega^1 M \to \Omega^1 F/L\big)$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_2^*(\Omega^1 M) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \Omega^1 F/L \\
\pi_2^*(\mathcal{S}_+) \otimes \pi_2^*(\mathcal{S}_-) \arrow[u, "\wr", "\pi_2^*(\sigma)"'] \arrow[r, "j_+ \otimes j_-"] & \mathcal{O}_F(1, 1), \arrow[u, dash, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

где σ — спинорное разложение $\Omega' M$, а $j_\pm$ — морфизмы в последовательностях

$$\begin{gathered}
0 \to \pi_2^* \Lambda^2 \mathcal{S}_+(-1, 0) \xrightarrow{i_+} \pi_2^* \mathcal{S}_+ \xrightarrow{j_+} \mathcal{O}_F(1, 0) \to 0, \\
0 \to \pi_2^* \Lambda^2 \mathcal{S}_-(0, -1) \xrightarrow{i_-} \pi_2^* \mathcal{S}_- \xrightarrow{j_-} \mathcal{O}_F(0, 1) \to 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Из отождествления res и $j_+ \otimes j_-$ следует, что $\mathcal{N}$ содержит локально прямой подпучок ранга один

$$\mathcal{N}_0 = \operatorname{Im}\big(i_+ \otimes i_-\colon \pi_2^*(\Lambda^2 \mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2 \mathcal{S}_-(-1, -1)) \to \\ \to \pi_2^*(\Omega^1 M)\big).$$

Выберем теперь сечения $\varepsilon_\pm \in \Lambda^2 \mathcal{S}_\pm$, метрику $g = \varepsilon_+ \otimes \varepsilon_-$ и соответствующую связность Леви-Чивиты ∇^g на $\Omega^1 M$. Ее подъем на F индуцирует отображение $\nabla^g_{F/L}\colon \pi_2^* \Omega^1 M \to \to \pi_2^* \Omega^1 M \otimes \Omega^1 F/L$.

3. **Теорема.** *Подпучок $\mathcal{N}_0 \subset \pi_2^*(\Omega^1 M)$ инвариантен относительно $\nabla^g_{F/L}$, т. е. $\nabla^g_{F/L}(\mathcal{N}_0) \subset \mathcal{N}_0 \otimes \Omega^1 F/L$, и суще-*

ствует естественный изоморфизм

$$\pi_1^{-1}(I) \rightrightarrows \operatorname{Ker}\left(\nabla^g_{F/L}\colon \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}_0 \otimes \Omega^1 F/L\right).$$

Следствие. *$I \subset \Omega^1 L$ — локально прямой подпучок ранга 1; его ограничение на любую квадрику $L(x)$ изоморфно $\mathcal{O}(-1, -1)$.*

Доказательство. Любой нулевой касательный вектор X на M есть ненулевое произведение двух спиноров в той же точке: $X = s_+ \otimes s_-$, которые определены с точностью до умножения на константу. Будем говорить, что эти спиноры касаются соответствующего нулевого направления. Параллельный перенос вдоль нулевой геодезической касательного к ней вектора оставляет его касательным. Поэтому то же верно, если заменить касательный вектор касательным спинором, перенося его с помощью связности $\nabla_\pm$. Пусть $y \in F$, $x = \pi_2(y)$, $X = s_+(x) \otimes s_-(x) \in \mathcal{T}F/L(y)$ — вектор из $\mathcal{T}F/L$ в точке y. Тогда, согласно определению, $\mathcal{N}_0(y) = s_+(x)^\perp \otimes \otimes s_-(x)^\perp$. Следовательно, параллельный перенос ковектора из $\mathcal{N}_0(y)$ относительно ∇^g не выводит его за пределы $\mathcal{N}_0$.

Пусть теперь ω — локальное сечение $\mathcal{N}_0$ с цилиндрической областью определения W следующего типа: имеется изоморфизм $W \simeq V \times U$, где $V = \pi_1(W) \subset L$, U — единичный круг в $\mathbf{C}$, π_1 — проекция $V \times U$ на первый множитель. Основной момент доказательства — конструкция такой 1-формы ν на V, что $\pi_1^*(\nu) \mid W = \omega$. Чтобы построить эту форму, попытаемся определить ее значения на векторных полях Y на V формулой

$$i_Y(\nu) = i_J(\omega),$$

где J — любой подъем векторного поля Y на W (он существует благодаря цилиндричности W). Правая часть этой формулы не меняется при замене J на J', потому что $J - J'$ является сечением $\mathcal{T}F/L$ и $\mathcal{N}_0 \subset (\mathcal{T}F/L)^\perp$. Проблема только в том, что $i_J(\omega)$, вообще говоря, является сечением $\mathcal{O}_F$, а мы должны установить, что это — сечение $\pi_1^{-1}(\mathcal{O}_L)$, так как $i_Y(\nu)$ есть функция на L. Таким образом, нужно показать, что $d_{F/L}(i_J(\omega)) = 0$. Этой цели служит небольшое вычисление, в котором впервые используется то обстоятельство, что связность ∇^g не имеет кручения.

Построим на W такое векторное поле X, что $i_J(\omega) = \pi_2^* g(X, J)$, т. е. «поднимем индексы» ω с помощью g. Поле X принадлежит $\mathcal{T}F/L$. Поэтому, выбрав X, можно еще менять J на кратности X. Воспользуемся этим, чтобы заменить J на такое поле $J' = J + hX$, что $[X, J'] = 0$: если ω не обращается в нуль в W, то и X не обращается в нуль; тогда $[X, J] = fX$ для некоторой f, и достаточно решить уравнение $Xh = -f$. Пусть уже $[X, J] = 0$. Условие $d_{F/L}(i_J\omega) = 0$, которое мы хотим проверить, равносильно $X\pi_2^*g(X, J) = 0$. Но

$$X\pi_2^*g(X, J) = \pi_2^*g(i_X\nabla_{F/L}^g X, J) + \pi_2^*g(X, i_X\nabla_{F/L}J).$$

Здесь $i_X\nabla_{F/L}^g X = 0$, ибо $\nabla_{F/L}^g\omega = 0$. Далее, по общим формулам

$$i_X(\nabla_{F/L}J) = i_J\nabla_{F/L}X + [X, J] + t(X, J),$$

где t — тензор кручения ∇, поднятый на F; он равен нулю, если $\nabla = \nabla^g$ — связность Леви-Чивиты, а $[X, J] = 0$ по выбору J. Окончательно,

$$X\pi_2^*g(X, J) = \pi_2^*g(X, i_J\nabla_{F/L}X) = \frac{1}{2} J\pi_2^*g(X, X) = 0,$$

ибо X — нулевое поле.

Таким образом, мы построили инъективное отображение пучков $\pi_1^{-1}(\mathcal{O}_L)$-модулей

$$\operatorname{Ker}\nabla_{F/L}^g \cap \mathcal{N}_0 \to \pi_1^{-1}(I)\colon\ \omega \mapsto \pi_1^{-1}(\nu) \,|\, W$$

(ν обращается в нуль на векторах, касательных к квадрикам $L(x)$, потому что ω поднята с M и, значит, обращается в нуль на π_2-вертикальных векторных полях). Поскольку $\mathcal{O}_F$-ранг $\mathcal{N}_0$ равен 1, а $\mathcal{O}_L$-ранг I не больше 1, нетрудно убедиться, что это изоморфизм. ■

4. Преобразование Радона — Пенроуза. Из результатов п. 2 видно, что пучок $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} j_+ \otimes j_-$ можно вложить в следующую точную последовательность:

$$0 \to \pi_2^*(\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-)(-1, -1) \to$$
$$\to \pi_2^*(\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \mathcal{S}_-)(-1, 0) \oplus \pi_2^*(\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-)(0, -1) \to \mathcal{N} \to 0.$$

Все пучки, кроме $\mathcal{N}$, здесь относительно ацикличны над M. Поэтому

$$R^i\pi_{2*}\mathcal{N} = 0 \quad \text{для всех} \quad i \geqslant 0.$$

Стало быть, при условии, что слои π_1 связны, в этой ситуации применима теорема 2.3, которая устанавливает эквивалентность категорий:

а) M-тривиальных локально свободных пучков $\mathscr{E}_L$ на L;

б) пар $(\mathscr{E}, \nabla)$, где $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на M, ∇ — связность на нем с тривиальной монодромией вдоль нулевых геодезических.

Заметим, что, в отличие от диаграммы автодуальности, здесь не нужно требовать тривиальности кривизны вдоль геодезических: это условие выполняется автоматически. Таким образом, если в автодуальном случае для самой возможности перенести $(\mathscr{E}, \nabla)$ с M на Z нужно, чтобы ∇ была автодуальной, здесь никаких ограничений типа дифференциальных уравнений на ∇ не накладывается. С другой стороны, встает вопрос, каким условиям должен удовлетворять пучок $\mathscr{E}_L$ на L, чтобы $(\mathscr{E}, \nabla)$ был, скажем, решением уравнений Янга — Миллса. Мы займемся этим позже, а здесь скажем несколько слов о реконструкции диаграммы автодуальности по L, по аналогии с п. 2.8.

5. Деформации стандартно вложенной квадрики. Если L — пространство нульгеодезических, то в L имеется четырехмерное семейство погруженных квадрик $L(x)$. Нормальный пучок этого погружения $\mathscr{N}|L(x) = \mathscr{N}(x)$, как следует из предыдущих вычислений, таков же, как в плоском случае, в частности, с точностью до изоморфизма он не зависит от x. Назовем квадрику в пятимерном многообразии с таким свойством стандартно вложенной. Построим по стандартно вложенной квадрике $L(x_0) \subset L$ многообразие M всех ее стандартно вложенных деформаций. По теории Кодаиры имеют место следующие факты.

а) M — четырехмерное открытое многообразие в пространстве всех деформаций $L(x_0)$. Это, как в п. 2.8, следует из жесткости квадрики, жесткости пучка $\mathscr{N}(x)$ и того, что $\dim H^0(P^1 \times P^1, \mathscr{N}_0) = 4$, $\dim H^1(P^1 \times P^1, \mathscr{N}_0) = 0$.

б) Пусть $F \subset L \times M$ — график универсального семейства стандартно вложенных квадрик. Тогда слои проекции $F \to M$ являются квадриками. Предположим, что существует локально прямой подпучок ранга 1 $I \subset \Omega^1 L$, ограничение которого на $L(x_0)$ изоморфно $\mathscr{O}(-1, -1)$. Тогда его ограничения на почти все стандартно вложенные деформации $L(x_0)$ изоморфно $\mathscr{O}(-1, -1)$, ибо пучок $\mathscr{O}(-1, -1)$ тоже жесткий. Уменьшив M при необходимости, будем считать, что это верно для всех $x \in M$.

Простое, но важное замечание состоит в том, что пучок I теперь автоматически обладает свойством, сформулированным в п. 2. В самом деле, ограничение сечений I на векторы, касательные к $L(x)$, определяет скалярное произведение

$I|L(x) \otimes \mathcal{T}L(x) \to \mathbf{C}$, т. е. сечение пучка $I^* \mid L(x) \otimes \Omega^1 L(x) \simeq \mathcal{O}(1, 1) \otimes (\mathcal{O}(-2, 0) \oplus \mathcal{O}(0, -2))$. Ненулевых сечений у него нет.

Следовательно, подпучок $\pi_1^* I \subset \pi_1^* \Omega^1 L \subset \Omega^1 F$ лежит также в $\pi_2^* \Omega^1 M$. Дуализируя это вложение, получаем сюръекцию $\pi_2^* \mathcal{T} M \to \pi_1^* I^*$, а спустив этот морфизм на M, получаем спинорное разложение $\mathcal{T} M$. Отсюда уже нетрудно заключить, что диаграмма стандартно вложенных деформаций $L(x_0)$ по существу является диаграммой нуль-геодезических.

Мы немного уточним это рассуждение в следующей теореме, показывающей, как выглядят на L структуры, отвечающие выбору метрики в конформном классе.

6. **Теорема.** *Пусть M — малое пространство-время, L — его пространство нуль-геодезических. Тогда следующие структуры на M и L эквивалентны:*

а) *спинорное разложение $\Omega^1 M = \mathcal{S}_+ \otimes \mathcal{S}_-$ и пара спинорных метрик, нигде не обращающихся в нуль, $\varepsilon_\pm \in \Gamma(\Lambda^2 \mathcal{S}_\pm)$;*

б) *разложение $I = I_+ \otimes I_-$, где $I_\pm$ — обратимые пучки, ограничения которых на любую квадрику $\mathrm{L}(x)$ изоморфны $\mathcal{O}(-1, 0)$ и $\mathcal{O}(0, -1)$ соответственно, и классы когомологий $\varepsilon_{\pm L} \in H^1(L, I_\pm^2)$, не обращающихся в нуль при ограничении на все $L(x)$.*

Эквивалентность между структурами а) и б) удовлетворяет следующему условию. Пусть $(\mathcal{S}_\pm)_L$ — преобразование Радона — Пенроуза пар $(\mathcal{S}_\pm, \nabla_\pm)$, где $\nabla_\pm \varepsilon_\pm = 0$. Тогда определены точные последовательности на L

$$0 \to I_\pm \to (\mathcal{S}_\pm)_L \to I_\pm^{-1} \to 0, \tag{2}$$

классы которых совпадают с $\varepsilon_{\pm L}$.

Доказательство. Большую часть работы, нужной для доказательства, мы уже проделали. Соберем все воедино.

Чтобы перейти от а) к б), рассмотрим на F точные последовательности (1). В доказательстве теоремы 3 было отмечено, что эти последовательности $\nabla_{\pm F/L}$-инвариантны, т. е. параллельный перенос вдоль нулевых геодезических не выводит сечения пучков $\pi_2^* \Lambda^2 \mathcal{S}_+(-1, 0)$ и $\pi_2^* \Lambda^2 \mathcal{S}_-(0, -1)$ за их пределы. Положим $I_\pm = \mathrm{Ker}\left(\nabla_{\pm F/L} \mid \Lambda^2 \mathcal{S}_\pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Согласно теореме 3, $I = I_+ \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} I_-$. (Как обычно, мы пишем равенство вместо канонического изоморфизма, который в данном случае является композицией следующих отождествлений: сечение $I_+ \otimes I_-$ есть сечение $\pi_2^*(\mathscr{S}_+ \otimes \mathscr{S}_-) = \pi_2^*\Omega^1 M$, равное нулю вдоль квадрик $L(x)$ и вдоль слоев π_1, потому принадлежащее $\pi_1^*(I)$; сверх того, оно $\nabla^g_{F/L}$-горизонтально, и потому спускается на L). Поскольку $\nabla_{\pm F/L}(\pi_2^*(\varepsilon_\pm)) = 0$, мы можем отождествить $\pi_2^*\Lambda^2\mathscr{S}_\pm(-1, 0)$ с $\mathcal{O}_F(-1, 0)$ и $\pi_2^*\Lambda^2\mathscr{S}_-(0, -1)$ с $\mathcal{O}_F(0, -1)$. По этой же причине связность, индуцируемая на факторпучках в (1), двойственна к связности, индуцируемой на подпучках. Стало быть, спуск (1) на L имеет вид (2). Обозначим через $\varepsilon_{\pm L}$ классы спущенных точных последовательностей. Мы закончили построение данных б) по а).

При переходе в обратную сторону сначала построим по $\varepsilon_{\pm L}$ расширения со структурой (2), в которых средние пучки обозначим $\Sigma_\pm$: они пока не отождествлены с $(\mathscr{S}_\pm)_L$. Точные последовательности

$$0 \to \pi_1^* I_\pm \to \pi_1^*\Sigma_\pm \to \pi_1^* I_\pm^{-1} \to 0 \tag{3}$$

снабжены относительными связностями $d_{\pm F/L}$. Поскольку $\varepsilon_{\pm L}$ не равны нулю на всех квадриках, $\pi_1^*\Sigma_\pm \mid L(x) \simeq \mathcal{O}^2_{L(x)}$: это следует из того, что на P^1 любое нетривиальное расширение $\mathcal{O}(1)$ с помощью $\mathcal{O}(-1)$ изоморфно $\mathcal{O}^2$. Поэтому мы можем положить $\overset{*}{\mathscr{S}}_\pm = \pi_{2*}\pi_1^*\Sigma_\pm$: это будут локально свободные пучки ранга 2, причем $\pi_2^*\overset{*}{\mathscr{S}}_\pm = \pi_1^*\Sigma_\pm$. Поскольку $\Lambda^2\pi_1^*\Sigma_\pm = \mathcal{O}_F$ канонически, получаем два сечения $\overset{*}{\varepsilon}_\pm \in \Lambda^2\overset{*}{\mathscr{S}}_\pm$, отвечающие единице. Спуск $d_{\pm F/L}$ дает связности на $\overset{*}{\mathscr{S}}_\pm$. Наиболее существенное место — восстановление спинорного разложения на $\Omega^1 M$ — мы, по существу, уже описали в конце п. 5. Из-за того, что имеется вложение $\pi_1^*(I_+ \otimes I_-) \subset \pi_2^*(\Omega^1 M)$, можно построить дуализацией сюръекцию $\pi_2^*\mathcal{T}M \to \pi_1^*(I_+^{-1} \otimes I_-^{-1})$, спуск которой дает изоморфизм $\mathcal{T}M \to \pi_{2*}\pi_1^* I_+^{-1} \otimes \pi_{2*}\pi_1^* I_-^{-1}$. Наконец, опуская на M последовательности (3), находим изоморфизмы

$$\overset{*}{\mathscr{S}}_\pm = \pi_{2*}\pi_1^*\Sigma_\pm \xrightarrow{\sim} \pi_{2*}\pi_1^* I_\pm^{-1},$$

поскольку $\pi_{2*}\pi_1^* I_\pm = R^1\pi_{2*}\pi_1^* I_\pm = 0$. Окончательно, $\mathcal{T}M = \overset{*}{\mathscr{S}}_+ \otimes \overset{*}{\mathscr{S}}_-$.

Мы оставляем читателю проверку того, что описанные конструкции взаимно обратны. ■

В § 7 мы объясним, каким образом кривизна связностей $\nabla_{\pm}$ закодирована в структуре пучков $\Sigma_{\pm}$, определенных классами $\varepsilon_{\pm L}$, и, стало быть, каким образом кривизна связности Леви-Чивиты закодирована в структуре пучка $\Sigma_{+} \otimes \Sigma_{-}$.

§ 6. Продолжения и препятствия

1. Расширения и продолжения. Пусть $L \leftarrow F \rightarrow M$ — диаграмма нуль-геодезических, $\mathscr{E}_L$ — M-тривиальный, или янг-миллсовский, пучок на L, $(\mathscr{E}, \nabla)$ — соответствующее ему поле Янга — Миллса. Локально по M оно является совершенно общим. Как сформулировать условия на $\mathscr{E}_L$, которые влекут, например, выполнение уравнений Янга — Миллса $\nabla \widetilde{\Phi}_{+}(\nabla) = 0$? Для плоской диаграммы мы дадим ответ на этот вопрос в § 9: он состоит в том, что $\mathscr{E}_L$ продолжается до локально свободного пучка на третьей инфинитезимальной окрестности L в $P \times \widehat{P}$. Другие задачи продолжения, приводящие к интересным уравнениям в теории поля, обсуждены в § 10.

Здесь мы дадим обзор когомологической теории продолжений и препятствий. Начнем с основных определений.

а) Пусть $Y \subset X$ — пара, состоящая из аналитического пространства и его замкнутого аналитического подпространства, $J \subset \mathcal{O}_X$ — пучок идеалов, определяющий Y. Тогда мы обозначаем через $Y^{(n)}$ и называем n-й инфинитезимальной окрестностью Y в X окольцованное пространство $(Y, \mathcal{O}_X/J^{n+1})$. Мы будем говорить, что X есть расширение Y. Расширение X называется инфинитезимальным, если оно совпадает с некоторой инфинитезимальной окрестностью Y.

Большинство рассматриваемых ниже расширений, но не все, будут заранее реализованы как инфинитезимальные окрестности.

Пусть Y и X — аналитические многообразия. Тогда у каждой точки $y \in Y \subset X$ есть система локальных координат $(y_1, \ldots, y_m; x_1, \ldots, x_n)$ в X такая, что уравнения Y в X суть $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Отсюда легко вывести, что пучок $\mathrm{Gr}\,\mathcal{O}_X = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_X/J^n$ изоморфен симметрической алгебре $S_{\mathcal{O}_Y}(J/J^2)$, где $\mathcal{N} = J/J^2$ — локально свободный над $\mathcal{O}_Y$ пучок, называемый конормальным пучком к Y в X.

б) Пусть $Y \subset X$ — некоторое расширение Y. Мы будем рассматривать некоторые объекты на Y, которые могут быть индуцированы соответствующими объектами на X;

каждое такое индуцирование мы будем называть продолжением. Вот список основных примеров.

Пусть $Y' \subset X'$ — другое расширение, $f\colon Y \to Y'$ — морфизм аналитических пространств. Его продолжением называется морфизм $g\colon X \to X'$, совпадающий с f на Y'.

Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на Y. Его продолжением называется локально свободный пучок $\mathscr{F}$ на X вместе с изоморфизмом $\mathscr{F}\,|\,Y \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$. (Требование локальной свободы $\mathscr{F}$ всегда будет подразумеваться, поэтому «продолжение нулем» не является продолжением, если $Y \neq X$). Два продолжения $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ называются изоморфными, если существует изоморфизм, индуцирующий id на $\mathscr{E}$.

Пусть $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ — локально свободный пучок и его продолжение. Продолжением класса когомологий $h \in H^k(Y, \mathscr{E})$ называется такой класс когомологий $h' \in H^k(X, \mathscr{F})$, что $i^*(h') = h$, где i^* индуцирован вложением $Y \subset X$.

в) Задача продолжения классов когомологий допускает непосредственную переформулировку в терминах точной последовательности. Из локальной свободы $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ следует точная последовательность пучков на X: $0 \to J\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/J\mathscr{F} = i_*\mathscr{E} \to 0$; кроме того, $H^k(Y, \mathscr{E}) = H^k(X, \mathscr{F}/J\mathscr{F})$. Рассмотрим отрезок точной последовательности когомологий

$$\ldots \to H^{k-1}(Y, \mathscr{E}) \to H^k(X, J\mathscr{F}) \to H^k(X, \mathscr{F}) \to$$
$$\to H^k(Y, \mathscr{E}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(X, J\mathscr{F}) \to \ldots$$

Из определений немедленно получаются следующие утверждения.

Класс $h \in H^k(Y, \mathscr{E})$ допускает продолжение с Y на X в том и только том случае, когда обращается в нуль некоторый класс когомологий

$$\delta(h) \in H^{k+1}(X, J\mathscr{F}),$$

препятствие к продолжению h.

Если $\delta(h) = 0$, то на множестве продолжений h транзитивно действует группа $H^k(X, J\mathscr{F})$ (в самом деле, множество продолжений представляет собой смежный класс относительно этой группы в $H^k(X, \mathscr{F})$).

Действие этой группы эффективно, если $H^{k-1}(Y, \mathscr{E}) = 0$.

Оказывается, что аналогичная когомологическая картина имеет место и для задач продолжения других геометрических объектов, по крайней мере «в линейном приближении». Нас будут в первую очередь интересовать локально свободные пучки, для которых линейное приближение совпадает с полной задачей, если ограничиться классом *простых расширений* $Y \subset X$, который мы определим в п. 3.

2. Дифференциальные формы на аналитических пространствах. Пусть $Y \subset X$ — такое расширение, что X — многообразие, J — пучок идеалов, определяющий Y в $\mathcal{O}_X$. Положим

$$\Omega^{\cdot} Y = \Omega^{\cdot} X / \left(J \Omega^{\cdot} X + (\Omega^{\cdot} X)\, dJ\right).$$

Можно дополнить это определение конструкцией канонических изоморфизмов между двумя пучками $\Omega^{\cdot} Y$, определенными с помощью различных расширений, и убедиться, что эти изоморфизмы совместимы с ограничениями на открытые подмножества. Это дает возможность определить $\Omega^{\cdot} Y$ даже в случае, если глобально Y не расширяется до многообразия: локально это всегда возможно.

Внешний дифференциал d_X на $\Omega^{\cdot} X$ индуцирует d_Y на $\Omega^{\cdot} Y$.

В отличие от случая мгногообразий, $\Omega^{\cdot} Y$ может не быть локально свободен, а комплекс де Рама на Y может не быть точным.

Морфизм $\varphi\colon Y \to Z$ определяет морфизм $\varphi^* (\Omega^{\cdot} Z) \to \Omega^{\cdot} Y$. Положим $\Omega^1 Y/Z = \Omega^1 Y / \operatorname{Im} \varphi^*$ и $\Omega^k Y/Z = \Lambda^k (\Omega^1 Y/Z)$. Это не слишком удачное определение в общем случае, но для наших нужд его хватит.

Далее, на случай аналитических пространств переносится определение связности на локально свободном пучке, последовательности де Рама пучка со связностью, кривизны и т. п., а также их относительные варианты.

3. Простые расширения. Расширение аналитических пространств $Y \subset X$ называется *простым*, если выполнены два условия:

а) $J^2 = 0$, где $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / J$;

б) последовательность пучков $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$0 \to J \xrightarrow{d \otimes 1} \Omega^1 X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1 Y \to 0 \tag{1}$$

точна.

Остановимся подробнее на втором условии. Прежде всего, вложение $i\colon Y \subset X$ индуцирует отображение $\mathcal{O}_X$-модулей $\Omega^1 X \to \Omega^1 Y$. Оно сюръективно, ибо локально любая функция продолжается с Y на X, и потому индуцирует сюръективное отображение $\Omega^1 X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1 Y$. Из определения пучка дифференциалов следует, что dJ попадает в ядро. Поскольку $J^2 = 0$, умножение на $f \in \mathcal{O}_X$ в J зависит лишь от образа f в $\mathcal{O}_Y$, так что J является $\mathcal{O}_Y$-модулем. Наконец, $d(fj) = df \cdot j + f\,dj$ и $(df \cdot j) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} 1_Y = 0$ для $j \in J$, $f \in \mathcal{O}_X$, так что $d \otimes 1$ является морфизмом $\mathcal{O}_Y$-модулей.

Таким образом, последовательность (1) определена и является комплексом при выполнении а). В среднем члене она всегда точна, так что условие простоты сводится к требованию $\operatorname{Ker}(d \otimes 1) = 0$.

4. Характеристический класс простого расширения. Последовательность (1) определяет класс

$$b = b(X, Y) \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\Omega^1 Y, J),$$

который называется характеристическим классом расширения $Y \subset X$. В случае, когда $\Omega^1 Y$ локально свободен (это равносильно тому, что Y — многообразие), можно считать, что

$$b \in H^1(Y, \mathcal{T}Y \otimes J).$$

Наоборот, пусть J — некоторый $\mathcal{O}_Y$-модуль, и задан класс $b \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\Omega^1 Y, J)$, или, что то же, точная последовательность $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$0 \to J \xrightarrow{a} \mathcal{A} \xrightarrow{b} \Omega^1 Y \to 0. \qquad (2)$$

Покажем, что по ней реконструируется простое расширение $Y \subset X$, для которого (2) канонически изоморфно (1), причем на $\Omega^1 Y$ и J изоморфизмы тождественны.

Пусть $\mathcal{O}_Y \oplus \Omega^1 Y$ — пучок колец с умножением

$$(f, \omega)(g, \nu) = (fg, f\nu + g\omega).$$

Рассмотрим отображение $c\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y \oplus \Omega^1 Y$, $f \mapsto f + df$. Из формулы Лейбница следует, что это вложение колец.

По последовательности (2) построим расширение пучка колец $\mathcal{O}_Y \oplus \Omega^1 Y$ с помощью идеала J с нулевым квадратом:

$$0 \to J \xrightarrow{\binom{0}{a}} \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{A} \xrightarrow{(\mathrm{id},\, b)} \mathcal{O}_Y \oplus \Omega^1 Y \to 0$$

и затем положим $\mathcal{O}_X = (\mathrm{id}, b)^{-1} \circ c(\mathcal{O}_Y)$. Нетрудно убедиться, что мы получили простое расширение Y с характеристическим классом (2).

Важнейший для нас класс простых расширений доставляет следующая легкая лемма, проверку которой мы оставляем читателю.

5. Лемма. *Пусть* $Y \subset X$ — *замкнутое вложение многообразия в многообразие. Тогда* $Y^{(n+1)}$ *является простым расширением* $Y^{(n)}$ *для всех* $n \geqslant 0$. ■

Пусть теперь $Y \subset X$ — простое расширение, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на Y. Сформулируем основной результат этого параграфа, который будет многократно применяться в ситуации леммы 5.

6. Теорема. а) *Для того чтобы существовало продолжение (локально свободное) пучка* $\mathscr{E}$ *на* X, *необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль некоторый класс когомологий,— препятствие к продолжению:*

$$\omega(\mathscr{E}) \in H^2(Y, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J),$$

где J — *идеал (и конормальный пучок) расширения.*

б) *Если* $\omega(\mathscr{E}) = 0$, *то на множестве классов продолжений (с точностью до изоморфизма) транзитивно действует группа когомологий* $H^1(Y, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J)$. *Это действие эффективно, если существует такое продолжение* $\mathscr{F}$ *пучка* $\mathscr{E}$, *что любое сечение* $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}$ *продолжается до сечения* $\mathscr{E}nd\,\mathscr{F}$.

Прежде чем доказывать эту теорему, установим ее связь с некоммутативными когомологиями.

7. Некоммутативные когомологии и торсоры. Любой локально свободный пучок $\mathscr{E}$ ранга n на Y можно задать матричными функциями перехода в подходящем открытом покрытии $Y = \bigcup U_i$:

$$g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j,\ \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y)), \quad \text{если} \quad U_i \cap U_j \neq \varnothing,$$

которые подчинены условиям коцикла

$$g_{ii} = 1, \quad g_{ij}g_{ji} = 1, \quad g_{jk}g_{ki}g_{ij} = 1 \qquad \text{на } U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing. \qquad (3)$$

Пучок $\mathscr{E}$, отвечающий коциклу (g_{ij}), получается склейкой пучков $\mathcal{O}^n_{U_i}$ по следующему правилу: набор сечений $s_i \in \Gamma(U \cap U_i,\ \mathcal{O}^n_{U_i})$ представляет сечение $s \in \Gamma(U, \mathscr{E})$, если для всех пар i, j с $U \cap U_i \cap U_j = \varnothing$ имеем $g_{ij}s_j = s_i$. Смена координат в тривиализации $\mathcal{O}^n_{U_i}$ вида $s'_i = h_i s_i$, $h_i \in \Gamma\left(U_i, \mathrm{GL}\left(n; \mathcal{O}_{U_i}\right)\right)$, приводит к смене коцикла на когомологичный ему

$$g'_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}. \qquad (4)$$

Наконец, сравнение двух заданий одного и того же пучка в разных покрытиях достигается переходом к их общему измельчению, при котором новые функции g_{ij} получаются ограничением из старых, и последующим сравнением тривиализаций по формуле (4).

Аксиоматизация этих конструкций ведет к следующим определениям. Пусть G — пучок групп на топологическом пространстве Y, (U_i) — покрытие Y. 1-коцикл на (U_i) с коэффициентами в G есть набор сечений $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G)$ с соотношениями (3). Множество 1-коциклов обозначается $Z^1((U_i), G)$. Множество 1-когомологий Чеха в покрытии (U_i) есть фактор Z^1 по отношению эквивалентности B^1 вида (2), где $h_i \in \Gamma(U_i, G)$, оно обозначается $H^1((U_i), G) = Z^1((U_i), G)/B^1((U_i), G)$. Множество 1-когомологий пространства Y с коэффициентами в G есть

$$H^1(Y, G) = \varinjlim H^1((U_i), G),$$

где предел берется по измельчающимся покрытиям Y. Элементы H^1, а также представляющие их коциклы называют также G-торсорами.

8. Точные последовательности некоммутативных когомологий. Поскольку в общем случае $H^1(Y, G)$ не является группой, поведение этого множества относительно гомоморфизмов G описывается более сложно, чем для пучков абелевых групп. Необходимый нам минимум состоит в следующем. Пусть

$$1 \to A \to G \to H \to 1 \tag{5}$$

— точная последовательность пучков групп, причем нормальный делитель A абелев. Тогда любой торсор $h \in H^1(Y, H)$ определяет скрученный пучок A^h следующим образом. Пусть (h_{ij}) — коцикл Чеха, представляющий h. Склеим A^h из $A \mid U_i$, пользуясь тем, что H действует на A подъемом в G и последующим сопряжением. Иными словами, $\{a_i \in \Gamma(U \cap U_i, A)\}$ представляет сечение $a \in \Gamma(U, A^h)$, если для всех пар i, j с $U \cap U_i \cap U_j \neq \varnothing$ имеем $\widetilde{h}_{ij} a_j \widetilde{h}_{ij}^{-1} = a_i$, где $\widetilde{h}_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G)$, $\widetilde{h}_{ij} \mapsto h_{ij}$. Смена коцикла, представляющего торсор, приводит к тому же пучку A^h с точностью до канонического изоморфизма. Теперь мы можем провести основные конструкции, нужные для доказательства теоремы 6, в абстрактной ситуации.

Препятствие. Пусть $h = (h_{ij})$ — торсор с коэффициентами в H. Покажем, как построить по нему класс когомологий $\omega(h) \in H^2(Y, A^h)$ такой, что $\omega(h) = 0$, если и только если h лежит в образе $H^1(Y, G) \to H^1(Y, H)$. Выберем покрытие (U_i) настолько мелким, чтобы, как в предыдущем абзаце, компоненты h_{ij} поднимались до $\tilde{h}_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G)$. Можно считать также, что $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}^{-1}$, $\tilde{h}_{ii} = 1$, но тройные произведения, как в (3), будут, вообще говоря, отличаться от единицы. Положим

$$a_{ijk} = \tilde{h}_{jk}\tilde{h}_{ki}\tilde{h}_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, A)$$

и рассмотрим коцепь

$$\hat{a} = (\hat{a}_{ijk} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, A^h),$$

где $\hat{a}_{ijk} = a_{ijk}$ рассматривается «в j-й тривиализации» пучка A^h, т. е. в отождествлении $A^h|U_j = A|U_j$. Мы утверждаем, что $\hat{a}$ есть коцикл Чеха: $\hat{a} \in Z^2((U_i), A^h)$. Проверим косую симметрию, скажем, $\hat{a}_{ijk} = (\hat{a}_{jik})^{-1}$. Имеем $\hat{a}_{jik} = \tilde{h}_{ik}\tilde{h}_{kj}\tilde{h}_{ji}$ в i-й тривиализации. Чтобы сравнить эту компоненту с $\hat{a}_{ijk}$, переведем ее в j-ю тривиализацию сопряжением посредством $\tilde{h}_{ij}^{-1}$:

$$(\hat{a}_{jik} \text{ в } j\text{-й тривиализации}) = \tilde{h}_{ji}\tilde{h}_{ik}\tilde{h}_{kj} = ((\hat{a}_{ijk}^{-1}) \text{ в } j\text{-й тривиализации}).$$

Проверим теперь, что $\hat{a}$ является коциклом:

$$\hat{a}_{jkl}(\hat{a}_{ikl})^{-1}\hat{a}_{ijl}(\hat{a}_{ijk})^{-1} = 1. \tag{6}$$

Переведем все компоненты, скажем, в k-ю тривиализацию. Будем для краткости записывать $\tilde{h}_{kl}\tilde{h}_{lj}\tilde{h}_{jk}$ в виде $(kl)(lj)(jk)$ и т. п. Тогда левая часть (6) в k-й тривиализации приобретает вид

$$[(kl)(lj)(jk)]^{-1}[(kl)(li)(lk)]\ [(kj)(jl)(li)(ij)(jk)]^{-1}[(ki)(ij)(jk)].$$

Пользуясь тем, что $(kl)(lk) = (ik)(ki) = 1$, перепишем третий сомножитель, сделав в нем эти тривиальные вставки и затем сгруппировав множители по три:

$$(kj)(jl)(li)(ij)(jk) = [(kj)(jl)(lk)][(kl)(li)(ik)][(ki)(ij)(jk)].$$

Теперь ясно, что все сокращается.

Итак, a — коцикл. Обозначим через $\omega(h)$ его класс когомологий. Оставим читателю проверку совместимости его конструкции со сменой тривиализации и переходом к другому покрытию. Проверим, однако, что если $\widehat{a}$ распадается, то существует подъем h до торсора с коэффициентами в G. Именно, пусть

$$a_{ijk} = b_{jk}(\widehat{b}_{ik})^{-1}\widehat{b}_{ki}, \quad \widehat{b}_{ik} = (\widehat{b}_{ki})^{-1}.$$

Положим $\widetilde{h}'_{ij} = b_{ij}^{-1}\widetilde{h}_{ij}$, где b_{ij} совпадает с $\widehat{b}_{ij}$ в i-й тривиализации. Убедимся, что $\widetilde{h}'_{jk}\widetilde{h}'_{ki}\widetilde{h}'_{ij} = 1$. В самом деле, это выражение равно при переводе в j-ю тривиализацию:

$$b_{jk}^{-1}\widetilde{h}_{jk}b_{ki}^{-1}\widetilde{h}_{ki}b_{ij}^{-1}\widetilde{h}_{ij} =$$

$$= b_{jk}^{-1}\widetilde{h}_{jk}\left(\widetilde{h}_{jk}b_{ki}^{-1}\widetilde{h}_{jk}\right)\widetilde{h}_{ki}\left(\widetilde{h}_{ij}b_{ij}^{-1}\widetilde{h}_{ji}\right)\widetilde{h}_{ij} =$$

$$= b_{jk}^{-1}b_{ki}^{-1}a_{ijk}b_{ij}^{-1} = 1.$$

Множество подъемов коцикла. Если $(\widetilde{h}_{ij})$ — один из подъемов коцикла (h_{ij}) из H в G, то, как показывает последнее вычисление, остальные имеют вид $(b_{ij}\widetilde{h}_{ij})$, причем $\widehat{b} \in Z^1((U_i), A^h)$. Замена $\widehat{b}$ на когомологичный коцикл меняет $(b_{ij}\widehat{h}_{ij})$ на когомологичный коцикл; то же происходит при смене коцикла в классе h. Переходя к пределу, получаем транзитивное действие $H^1(Y, A^h)$ на множестве продолжений.

Степень неэффективности действия. Пусть $K \subset \subset H^1(Y, A^h)$ — стационарная подгруппа какого-либо (и, значит, всех) подъема класса h. Выберем какой-нибудь подъем $\widetilde{h} \in H^1(Y, G)$ и определим пучки $G^{\widetilde{h}}$, $H^{\widetilde{h}} = H^h$ той же конструкцией, которой мы определяли A^h. Тогда существует точная последовательность групп

$$1 \to \Gamma\left(Y, A^h\right) \to \Gamma\left(Y, G^{\widetilde{h}}\right) \to \Gamma\left(Y, H^h\right) \xrightarrow{\delta} K \to 1.$$

Граничный гомоморфизм h определяется по аналогии с абелевым случаем. Пусть $s \in \Gamma(Y, H^h)$ представлено сечениями $s_i \in \Gamma(U_i, H)$ (разумеется, в i-й тривиализации). Поднимем их до $\widetilde{s}_i \in \Gamma\left(U_i, G^{\widetilde{h}}\right)$ и положим $c_{ij} = \widetilde{s}_j\widetilde{s}_i^{-1}$. Через $\delta(s)$ обозначим коцепь

($\widehat{c}_{ij} = c_{ij}$ *в* i*-й тривиализации*).

Проверку всех свойств оставляем читателю.

9. Доказательство теоремы 6. Применим общий формализм предыдущих пунктов к следующей ситуации:

$$G = \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_X),\quad H = \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y),\qquad n = \mathrm{rk}\,\mathcal{E},$$

где $Y \subset X$ — простое расширение. Тогда имеет место точная последовательность пучков вида (5)

$$1 \to M(n,\ J) \xrightarrow{a} \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_X) \to \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y) \to 1,$$

где $a(m) = 1 + m$. Пусть $h \in H^1((U_i),\ \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y))$ — коцикл, определяющий расслоение $\mathcal{E}$. В таком случае имеется естественное отождествление

$$M(n,\ J)^h = \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} J,$$

поскольку матрицы склейки действуют на $M(n,\ J)$ сопряжением. Отсюда сразу получаются все утверждения теоремы 6, кроме последнего — об эффективности действия. Для эффективности нужно, чтобы сюръективным было отображение

$$\Gamma(\mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y)^{\tilde{h}}) \to \Gamma(\mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y)^h),$$

где $\tilde{h}$ — некоторое продолжение h. Но эти скрученные пучки отождествляются с пучками автоморфизмов пучка $\mathcal{E}$ и его продолжения. Поэтому, если для одного из продолжений все эндоморфизмы $\mathcal{E}$ оказываются продолжаемыми, то же верно и для автоморфизмов. ∎

10. Дополнения. а) Тот же формализм пригоден для изучения продолжений локально свободных пучков, структурная группа которых редуцирована до комплексной подгруппы Ли $G \subset \mathrm{GL}(n)$. Соответствующая точная последовательность пучков имеет вид

$$1 \to \mathcal{G} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} J \to G(\mathcal{O}_X) \to G(\mathcal{O}_Y) \to 1,$$

где $\mathcal{G}$ — алгебра Ли группы G. Здесь $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_Y)^h$ есть локально свободный пучок алгебр Ли, ассоциированный с коциклом h и присоединенным представлением группы G.

б) Пользуясь характеристическим классом простого расширения, мы можем дать инвариантное выражение для препятствия $\omega(\mathcal{E})$. Именно, пусть $b(Y) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\Omega^1 Y,\ J)$ — этот характеристический класс, а $a(\mathcal{E}) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E},\ \mathcal{E} \otimes$

$\otimes\ \Omega^1 Y) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E},\ \Omega^1 Y)$ — класс расширения

$$0 \to \mathscr{E} \otimes \Omega^1 Y \to \mathrm{Jet}^1 \mathscr{E} \to \mathscr{E} \to 0.$$

Пользуясь умножением в группах Ext, мы можем построить произведение

$$a(\mathscr{E})\, b(Y) \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E},\ J) = H^2(Y,\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J).$$

С точностью до нормировок различных изоморфизмов это и будет $\omega(\mathscr{E})$.

Рабочее выражение для $\omega(\mathscr{E})$ можно получить еще и так. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & M(n;\ J) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{D}"] & \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & 1 \\
1 \arrow[r] & M(n;\ J) \arrow[r] & M\left(n;\ \Omega^1 X \otimes \mathcal{O}_Y\right) \arrow[r] & M(n;\ \Omega^1 Y) \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

где $Dg = g^{-1}dg$, $\widetilde{D}\tilde{g} = \tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \bmod J$. Точность нижней строки следует из простоты расширения.

Из формулы $D(gh) = h^{-1}(Dg)h + Dh$ следует, что на торсорах индуцируется отображение

$$H^1(Y,\ \mathrm{GL}(n;\ \mathcal{O}_Y)) \to H^1(Y,\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Omega^1 Y).$$

При этом h переходит в $a(\mathscr{E})$. Далее, точная последовательность

$$0 \to \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J \to \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes (\Omega^1 X \otimes \mathcal{O}_Y) \to \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Omega^1 Y \to 0$$

доставляет граничный гомоморфизм

$$\delta\colon H^1(Y,\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Omega^1 Y) \to H^2(Y,\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J),$$

и $\delta[a(\mathscr{E})] = \omega(\mathscr{E})$. Это — перефразировка утверждения $\omega(\mathscr{E}) = a(\mathscr{E})b(Y)$. (Читатель должен помнить о беззаботности нашего обращения с нормировочными константами.)

в) Разностный класс когомологий для двух продолжений $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ пучка $\mathscr{E}$ можно построить канонически, даже если группа H^1 действует на множестве продолжений неэффективно. Именно, имеется точная последовательность

$$0 \to \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}_1,\ \mathscr{E}_2) \to \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \to 0$$

и граничный гомоморфизм

$$\delta\colon H^0(Y,\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}) \to H^1(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes J).$$

Поставим в соответствие класс $\delta(\mathrm{id})$ разности $[\mathscr{E}_2] - [\mathscr{E}_1]$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что сдвиг на этот класс переводит $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_2$.

11. Аналитический комплекс де Рама на инфинитезимальных окрестностях. В § 9 нам понадобится рассматривать комплекс де Рама на инфинитезимальных окрестностях в относительном варианте. Мы опишем здесь ситуацию, когда его свойства точности близки к соответствующим свойствам в случае многообразий. Пусть дана коммутативная диаграмма многообразий

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\Phi,"] \\ V \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки — субмерсии, а горизонтальные — замкнутые вложения. Пусть $Y^{(n)}$, $V^{(n)}$ — инфинитезимальные окрестности Y, V в X, W соответственно, $\varphi^{(n)}\colon Y^{(n)} \to V^{(n)}$ — морфизм, индуцированный Φ. Оказывается, с $\varphi^{(n)}$ можно работать, как с субмерсией многообразий.

12. Предложение. а) *Относительный голоморфный комплекс де Рама*

$$0 \to (\varphi^{(n)})^{-1}\left(\mathcal{O}_{Y^{(n)}}\right) \to \Omega^{\cdot} Y^{(n)}/V^{(n)}$$

точен.

б) *Пусть слои* φ *связны и* $H^p(\varphi^{-1}(v), \mathbf{C}) = 0$ *для* $p = 1, 2, \ldots, m$ *и всех* $v \in V$. *Пусть* $\mathcal{E}^{(n)}$ — *локально свободный пучок на* $V^{(n)}$. *Тогда канонический гомоморфизм*

$$H^p(V^{(n)}, \mathcal{E}^{(n)}) \to H^p(Y^{(n)}, \varphi^{-1}(\mathcal{E}^{(n)}))$$

является изоморфизмом для $p = 0, 1, \ldots, m$ *и мономорфизмом для* $p = m + 1$.

Доказательство. Из определения следует, что вложение $Y^{(n)} \subset Y^{(n+1)}$ индуцирует сюръекцию комплексов

$$\Omega^{\cdot} Y^{(n+1)}/V^{(n+1)} \to \Omega^{\cdot} Y^{(n)}/V^{(n)}.$$

Обозначим через $S_n^{\cdot}$ его ядро. Для вычислений индукцией по n нужно понимать структуру $S_n^{\cdot}$.

Обозначим через I, J пучки идеалов Y, V в $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_W$ соответственно. Рассмотрим диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I^{n+1}/I^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y^{(n+1)}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y^{(n)}} \arrow[r] \arrow[d, "d_{Y^{(n)}/V^{(n)}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \dfrac{I^{n+1}/I^{n+2}}{\Phi^*(J^{n+1}/J^{n+2})} \arrow[r] & \Omega^1 X/W \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1} \arrow[r, "a_n"] & \Omega^1 Y^{(n)}/V^{(n)} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Внешняя степень морфизма a доставляет точную последовательность

$$\Omega^{p-1}X/W \otimes \left(I^{n+1}/I^{n+2}\right)/\Phi^*\left(J^{n+1}/J^{n+2}\right) \to$$
$$\to \Omega^p X/W \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1} \xrightarrow{\Lambda^p a} \Omega^p Y^{(n)}/V^{(n)} \to 0.$$

Положим $R_n^p = \operatorname{Ker} \Lambda^p(a_n)$ и применим лемму о змее к коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^p_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^p X/W \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^p Y^{(n+1)}/V^{(n+1)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^p_n \arrow[r] & \Omega^p X/W \otimes \mathcal{O}_X/I^{n+1} \arrow[r] & \Omega^p Y^{(n)}/V^{(n)} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Получим точную последовательность

$$0 \to T_n^p \to S_n^p \to R_n^p \to 0, \tag{7}$$

где

$$T_n^p = \operatorname{Coker}\left(R^p_{n+1} \to \Omega^p X/W \otimes I^{n+1}/I^{n+2}\right).$$

Теперь рассмотрим композицию

$$b_n\colon T_n^p \to S_n^p \xrightarrow{d} S_n^{p+1} \to R_n^{p+1}.$$

Вычисление в локальных координатах показывает, что это — морфизм $\mathcal{O}_Y$-модулей и что имеется точная последовательность

$$0 \to \Omega^p Y/V \otimes \varphi^*\left(J^{n+1}/J^{n+2}\right) \to T_n^p \xrightarrow{b_n} R_n^{p+1} \to 0. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу согласованности внешних дифференциалов, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Omega^p Y/V \otimes \varphi^*(J^{n+1}/J^{n+2}) \arrow[r, "d_{Y/V}"] \arrow[d] & \Omega^{p+1} Y/V \otimes \varphi^*(J^{n+1}/J^{n+2}) \arrow[d] \\
S_n^p \arrow[r, "d"] & S_n^{p+1}
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а еще одно вычисление в локальных координатах показывает, что композиция

$$R_n^{p+1} \to S_n^p/\Omega^p Y/V \otimes \varphi^*\left(J^{n+1}/J^{n+2}\right) \xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d} S_n^{p+1}/\Omega^{p+1} Y/V \otimes \varphi^*\left(J^{n+1}/J^{n+2}\right) \to R_n^{p+1}$$

является тождественным отображением. Учитывая (7) и (8), находим отсюда, что для всех открытых подмножеств

$U \subset Y$ имеют место изоморфизмы

$$H^*(H^p(U, S_n^{\cdot})) = H^*(H^p(U, \Omega^{\cdot} Y/V \otimes \varphi^*(J^{n+1}/J^{n+2}))).$$

Утверждение а) предложения 12 получается отсюда индукцией по n, если учесть, что последовательность

$$0 \to \varphi^{-1}(J^{n+1}/J^{n+2}) \to \Omega^{\cdot} Y/V \otimes \varphi^*(J^{n+1}/J^{n+2})$$

точна.

Утверждение б) получается также индукцией по n. Случай $n = 0$ — это предложение 2.4. Индуктивный шаг производится с помощью леммы о пяти гомоморфизмах, примененной к точной последовательности когомологий, отвечающей точной тройке

$$0 \to \mathscr{E}^{(0)} \otimes J^{n+1}/J^{n+2} \to \mathscr{E}^{(n+1)} \to \mathscr{E}^{(n)} \to 0,$$

где $\mathscr{E}^{(k)} = \mathscr{E}^{(n)} | V^{(k)}$ при $k \leqslant n$. ■

§ 7. Кривизна на пространстве нуль-геодезических

1. Постановка задачи. Рассмотрим диаграмму нуль-геодезических $L \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$. Пусть пучок $\mathscr{E}_L$ на L и пучок со связностью $(\mathscr{E}, \nabla)$ связаны друг с другом преобразованием Радона — Пенроуза через пару $(\mathscr{E}_F, \nabla_{F/L})$ на F: $\mathscr{E}_F = \pi_1^*(\mathscr{E}_L) = \pi_2^*(\mathscr{E})$, $\nabla_{F/L} = \pi_2^*(\nabla) \mid \mathscr{T} F/L$. В этом параграфе объяснено, как описать кривизну $\Phi(\nabla)$, т. е. напряженности поля Янга — Миллса в терминах данных, связанных с L и F. Мы начнем с вычислений в инфинитезимальной окрестности точки, а затем объясним, как их глобализовать.

Исходное замечание состоит в том, что значение $\Phi(\nabla)$ в точке $x \in M$, принадлежащее $\operatorname{End} \mathscr{E}(x) \otimes \Omega^2 M(x)$, зависит от вторых производных сечения $\mathscr{E}$ в точке x. Поэтому следует ожидать, что $\Phi(\nabla)$ отвечает какой-то объект, определяемый структурой $\mathscr{E}_L$ на второй инфинитезимальной окрестности $L(x)^{(2)} \subset L$. Следующие замечания основаны на поточечном анализе преобразования Радона — Пенроуза с точностью до второго порядка малости.

Фиксируем точку $x \in M$, положим $\mathscr{E}(x) = E$ и $\tilde{E} = E \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathcal{O}_{L(x)}$. Преобразование Радона — Пенроуза определяет отождествление $\mathscr{E}_L | L(x) = \tilde{E}$. Очевидно, пучок $\tilde{E}$ продолжается на $L(x)^{(1)}$ (например, как $E \otimes \mathcal{O}_{L(x)^{(1)}}$). Все продолжения классифицируются элементами $H^1(L(x), \operatorname{End} E \otimes \mathcal{N}(x))$, где $\mathcal{N}(x)$ — конормальный пучок к $L(x)$ в L (теорема 6.6), а эта группа нулевая (п. 5.4). Более того, $H^0\left(\mathcal{O}_{L(x)^{(1)}}\right) = \mathbf{C}$, так что отождествление $E \otimes \mathcal{O}_{L(x)^{(1)}} \rightleftarrows \widetilde{E}^{(1)}$ единственно.

Продолжение $\widetilde{E}^{(1)}$ на $L(x)^{(2)}$ также существует. Отмеченное тривиальное продолжение $E \otimes \mathcal{O}_{L(x)^{(2)}}$ удовлетворяет условию эффективности в теореме 6.6, б). Поэтому отображение «разностный класс»: $\widetilde{E}^{(2)} \mapsto \left(\text{класс } \widetilde{E}^{(2)} — \text{класс } E \otimes \mathcal{O}_{L(x)^{(2)}}\right) \in H^1\left(L(x), \operatorname{End} E \otimes S^2\mathcal{N}(x)\right)$ является биекцией.

Для вычисления группы продолжений рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{N}(x) \xrightarrow{i} \Omega^1 M(x) \otimes \mathcal{O}_{L(x)} \xrightarrow{\text{res}} \Omega^1 F/L \mid L(x) \to 0 \tag{1}$$

и затем

$$\begin{aligned} 0 \to S^2(\mathcal{N}(x)) \xrightarrow{S^2(i)} S^2(\Omega^1 M(x)) \otimes \mathcal{O}_{L(x)} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{a} \Omega^1 M(x) \otimes \Omega^1 F/L \mid L(x) \to 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая, что $H^0(S^2\mathcal{N}(x)) = 0$ и $H^0(\Omega^1 F/L|L(x)) = \Omega^1 M(x)$, получаем из (2) изоморфизм

$$\delta\colon\ \Omega^1 M(x)^{\otimes 2}/S^2(\Omega^1 M(x)) = \Omega^2 M(x) \to H^1(L(x),\ S^2\mathcal{N}(x))$$

и затем

$$\mathrm{id} \otimes \delta\colon\ \operatorname{End} E \otimes \Omega^2 M(x) \rightleftarrows H^1(L(x), \operatorname{End} E \otimes S^2\mathcal{N}(x)). \tag{3}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат параграфа.

2. Теорема. *В условиях предыдущего пункта обозначим через* $\varphi(x) \in H^1(L(x), \operatorname{End} E \otimes S^2\mathcal{N}(x))$ *разностный класс пучка* $\mathscr{E}_L|L(x)^{(2)}$ *и тривиального продолжения* $E \otimes \mathcal{O}_{L(x)^{(2)}}$, *а через* $\Phi(\nabla)(x) \in \operatorname{End} E \otimes \Omega^2 M(x)$ — *значение формы кривизны* $\Phi(\nabla)$ *в точке* $x \in M$. *Тогда*

$$(\mathrm{id} \otimes \delta)[\Phi(\nabla)(x)] = \varphi(x).$$

Доказательство. *Пусть* $U \ni x$ — такая окрестность, над которой $\mathscr{E}$ тривиален и, значит, $\mathscr{E}_F|F(U)$ тривиален. Зададим $\mathscr{E}_L$ на $L(U)$ матрицами склейки g_{ij}, выбрав некоторое покрытие V_i и тривиализации $\mathscr{E}_L$ на нем. Тривиализовав также $\mathscr{E}_F | F(U)$ сечениями, поднятыми с U, получим разложение $g_{ij} = h_i h_j^{-1}$, где h_i — матричные функции на $\pi_1^{-1}(V_i)$. Поскольку $d_{F/L}(\pi_1^* g_{ij}) = 0$, имеем $d_{F/L} h_i \cdot h_j^{-1} - h_i h_j^{-1} d h_j h_j^{-1} = 0$, или

$$h_i^{-1} d_{F/L} h_i = h_j^{-1} d_{F/L} h_j \quad \text{на} \quad \pi_1^{-1}(V_i \cap V_j).$$

Таким образом, все $h_i^{-1} d_{F/L} h_i$ склеиваются в сечение пучка $\pi_2^*(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}) \otimes \Omega^1 F/L$ на $F(U)$. Пусть это сечение есть $\pi_2^*(A)$, где $A \in \Gamma(U, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Omega^1 M)$. Нетрудно убедиться, что $\nabla = d - A$ в выбранной тривиализации $\mathscr{E}$. В самом деле, строки h_i образуют базис сечений $\pi_1^{-1}(\mathscr{E}_L)$ над $\pi_1^{-1}(V_i)$, поэтому достаточно проверить, что $(d-A)_{F/L} h_i = 0$, но

$$(d - A)_{F/L} h_i = d_{F/L} h_i - h_i \pi_2^*(A) \,|\, V_i = \\ = d_{F/L} h_i - h_i (h_i^{-1} d_{F/L} h_i) = 0.$$

Предположим теперь, что выбранный базис $\mathscr{E}$ в точке $x \in M$ горизонтален до первого порядка малости. Это значит, что в локальной системе координат (x^a) на M имеем

$$A = \Phi_{ab} x^a dx^b + \ldots,$$

где $\Phi_{ab} \in \operatorname{End} E$, $E = \mathscr{E}(x)$, а многоточие заменяет члены поряда $\geqslant 2$ по x^a. Поэтому кривизна имеет вид

$$-dA + A \wedge A = -\Phi_{ab} dx^a \wedge dx^b + \ldots,$$

т. е.

$$\Phi(\nabla)(x) = -\Phi_{ab} dx^a \wedge dx^b + \ldots$$

С другой стороны, подберем тривиализации $\mathscr{E}_L$ на V_i так, чтобы g_{ij} в инфинитезимальной окрестности $L(x)$ отличались от 1 лишь членами второго порядка малости по нормальным координатам к $L(x)$. Это возможно в силу результатов п. 1: $g_{ij} = 1 + \tilde{g}_{ij} + \ldots$ Согласовав базисы $\mathscr{E}(x)$ и $\mathscr{E}_L | L(x)$, можем считать, что также $h_i = 1 - \tilde{h}_i + \ldots$ Тогда $\tilde{g}_{ij} = \tilde{h}_j - \tilde{h}_i$. Это — явное расщепление разностного коцикла $\varphi(x)$ между $\mathscr{E} | L(x)^{(2)}$ и $E \otimes \mathscr{O}_{L(x)^{(2)}}$, после его отображения в коцепи с коэффициентами в $S^2\Omega^1 M(x) \otimes \mathscr{O}_{L(x)}$. Из (2) тогда очевидно, что если обозначить через $\tilde{a}$ композицию морфизма a с переходом к сечениям и антисимметризацией, то

$$(\mathrm{id} \otimes \delta)^{-1}\varphi(x) = (\text{сечение, представленное } \tilde{a}(\tilde{h}_i) \text{ над } V_i \cap L(x)).$$

Теперь вспомним, что на $\pi_1^{-1}(V_i)$ имеем

$$(1 - \tilde{h}_i + \ldots)^{-1}(-d_{F/L}\tilde{h}_i + \ldots) = \\ = \pi_2^*(A) \mid \mathcal{T} F/L = \Phi_{ab}x^a d_{F/L}x^b.$$

Отсюда следует, что применение a и антисимметризация переведет $\tilde{h}_i$ в сечение $-\Phi_{ab}dx^a \wedge dx^b = \Phi(\nabla)(x)$. ■

Нетрудно сформулировать глобальный вариант этого результата. Однако он будет относиться к $\mathcal{E}_F$, поскольку конормальные пучки $\mathcal{N}(x)$ к разным $L(x)$ являются лишь на F, но пе на L, ограничениями общего пучка $\mathcal{N}$ на разные слои π_2. Проведем некоторую подготовку к формулировке глобальной версии.

3. Когомологическое описание $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^2 M$. Заменяя в (1), (2) и (3) пучок $\mathcal{N}(x)$ на $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} \operatorname{res}(\pi_2^*\Omega^1 M \to \Omega^1 F/L)$, получаем в точности, как в п. 1, изоморфизм

$$\mathrm{id} \otimes \delta\colon \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^2 M \to \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes R^1\pi_{2*}S^2\mathcal{N}.$$

4. Разностный класс. Рассмотрим замкнутое вложение $F \subset L \times M$ и обозначим через $F^{(i)}$ i-ю инфинитезимальную окрестность F в этом вложении. Пусть $\pi_1^{(i)}$, $\pi_2^{(i)}$ — проекции $F^{(i)}$ на L, M. Имеем $\pi_1^*(\mathcal{E}_L) = \mathcal{E}_F = \pi_2^*(\mathcal{E})$. Поэтому $\pi_1^{(1)*}(\mathcal{E}_L)$ и $\pi_2^{(1)*}(\mathcal{E})$ являются двумя продолжениями $\mathcal{E}_F$ на $F^{(1)}$.

Вычислим конормальный пучок вложения F в $L \times M$. Его можно отождествить с ядром ограничения $\Omega^1(L \times M) | F$ на касательные поля к F, т. е. с ядром отображения

$$\pi_1^*\Omega^1 L \oplus \pi_2^*\Omega^1 M \xrightarrow{i_1 + i_2} \Omega^1 F,$$

где i_1 — вложение $\pi_1^*\Omega^1 L$ в $\Omega^1 F$ и аналогично i_2. Пусть $\mathcal{N}'$ — это ядро. Определим отображение $\mathcal{N} \to \mathcal{N}'$. Если $\omega \in \mathcal{N}$, то ω есть сечение $\pi_2^*\Omega^1 M$, равное нулю на $\mathcal{T} F/L$, поэтому имеется однозначно определенное сечение ν пучка $\pi_1^*\Omega^1 F/L$ с $i_1(\nu) = i_2(\omega)$. Отобразив ω в $(-\nu, \omega)$, получаем изоморфизм $\mathcal{N}$ с искомым конормальным пучком.

Поэтому разностный класс $[\pi_1^{(1)*}(\mathscr{E}_L)]-[\pi_2^{(1)*}(\mathscr{E})]$ лежит в группе $H^1(F, \mathscr{E}nd\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{N})$. Эта группа равна нулю, поскольку $\pi_{2*}\mathscr{N}=0$ и $R^1\pi_{2*}\mathscr{N}=0$. Значит, $\pi_1^{(1)*}(\mathscr{E}_L)$ и $\pi_2^{(1)*}(\mathscr{E})$ изоморфны, причем изоморфизм, индуцирующий тождественный изоморфизм на $\mathscr{E}_F$, как нетрудно убедиться, единствен. Таким образом, имеется канонически определенный пучок $\mathscr{E}_F^{(1)}$, а также два его продолжения на $F^{(2)}$: $\pi_1^{(2)*}(\mathscr{E}_L)$ и $\pi_2^{(2)*}(\mathscr{E})$. Их разностный класс φ лежит в группе $H^1(F, \mathscr{E}nd\mathscr{E}_F\otimes S^2\mathscr{N})$. Поскольку $\pi_{2*}(S^2\mathscr{N})=0$, эта группа равна

$$H^1(F, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes S^2\mathscr{N})=H^0(M, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}\otimes R^1\pi_{2*}S^2\mathscr{N}).$$

Теперь мы в состоянии сформулировать глобальную версию теоремы 2.

5. Теорема. $H^0(\mathrm{id}\otimes\delta)(\Phi(\nabla))=\varphi$. ■

Для ее проверки достаточно убедиться, что конструкции пп. 3 и 4 совместимы с поточечными вычислениями пп. 1 и 2.

6. Кривизна связности Леви-Чивиты. Рассмотрим ситуацию, описанную в § 5: данные спинорного разложения на L. Напомним, что они состоят из изоморфизма $I=I_+\otimes I_-$, где $I_+|L(x)\simeq\mathscr{O}(-1, 0)$, $I_-|L(x)\simeq\mathscr{O}(0, -1)$, и двух классов когомологий $\varepsilon_{\pm L}\in H^1(L, I_\pm^2)$, не обращающихся в нуль при ограничении на любую $L(x)$. В таком случае пучки ранга 2, $\Sigma_\pm$, отвечающие $\varepsilon_{\pm L}$ как классам расширений $0\to I_\pm\to\Sigma_\pm\to I_\pm^{-1}\to 0$, являются преобразованием Пенроуза спинорных расслоений $(\mathscr{S}_\pm, \nabla_\pm)$. Поэтому информация о спинорных кривизнах закодирована в структуре $\Sigma_\pm|L(x)^{(2)}$, а о кривизне связности Леви-Чивиты в $\Sigma_+\otimes\Sigma_-|L(x)^{(2)}$. К сожалению, это описание недостаточно удобно для формулировки, например, уравнений Эйнштейна в терминах L.

§ 8. Когомологические вычисления

1. Постановка задачи. Для дальнейшего анализа преобразования Радона — Пенроуза, связанного с диаграммой нуль-геодезических, нам понадобится знание ряда групп когомологий пучков на L.

В случае, когда пространство-время M малое, эта задача легко сводится к некоторым вычислениям на M. Пусть $\mathscr{F}$ — локально свободный пучок на L. Обозначим через $D(i; \mathscr{F})$

дифференциальный оператор первого порядка

$$D(i;\mathcal{F}) = \Gamma\left(R^i\pi_{2*}(\nabla_{F/L})\right):\ \Gamma\left(R^i\pi_{2*}\pi_1^*\mathcal{F}\right) \to$$
$$\to \Gamma\left(R^i\pi_{2*}\left(\pi_1^*\mathcal{F}\otimes\Omega^1F/L\right)\right), \qquad (1)$$

где $\nabla_{F/L}$: $\pi_1^*(\mathcal{F}) \to \pi_1^*\mathcal{F}\otimes\Omega^1F/L$ — стандартная связность вдоль слоев π_1.

2. Лемма. *Если M малое, то для любого i имеет место точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Coker} D(i-1;\ \mathcal{F}) \to H^i(L,\ \mathcal{F}) \to \operatorname{Ker} D(i;\ \mathcal{F}) \to 0 \qquad (2)$$

(*при $i=0$ первая группа равна нулю*).

Доказательство. Точная последовательность когомологий, связанная с относительной резольвентой де Рама пучка $\pi_1^{-1}(\mathcal{F})$, имеет вид

$$\ldots \xrightarrow{H^{i-1}(\nabla_{F/L})} H^{i-1}\left(F,\ \pi_1^*\mathcal{F}\otimes\Omega^1F/L\right) \to H^i\left(F,\ \pi_1^{-1}\mathcal{F}\right) \to$$
$$\to H^i\left(F,\ \pi_1^*\mathcal{F}\right) \xrightarrow{H^i(\nabla_{F/L})} H^i\left(F,\ \pi_1^*\mathcal{F}\otimes\Omega^1F/L\right).$$

В силу предложения 2.4, которое применимо благодаря малости M,

$$H^i\left(F,\ \pi_1^{-1}\mathcal{F}\right) = H^i(L,\ \mathcal{F}).$$

С другой стороны, к $H^i(F,\ \mathcal{K})$ сходится спектральная последовательность Лере морфизма π_2 со вторым членом $H^i\left(M,\ R^j\pi_{2*}\pi_1^*\mathcal{K}\right)$. Если $\mathcal{K}$ когерентен, то эти группы равны нулю при $i>0$ в силу интенсивности M. Следовательно, $H^i(F,\ \mathcal{K}) = \Gamma\left(M,\ R^i\pi_{2*}\pi_1^*\mathcal{K}\right)$. Наконец, $H^i(\nabla_{F/L})$ в нашем случае, очевидно, совпадает с $D(i;\ \mathcal{F})$. ■

Приведем теперь два образца вычислений, которые мы используем в следующем параграфе для интерпретации формализма продолжений и препятствий на L.

В обозначениях § 5 будем считать, что на L и M выбраны согласованные спинорные разложения, в частности, на L есть пучки $I_\pm$, $\Sigma_\pm$, и $\mathcal{S}_\pm^* = \pi_{2*}\pi_1^*I_\pm^{-1}$. Будем писать $\mathcal{F}(a,\ b)$ вместо $\mathcal{F}\otimes I_+^{-a}\otimes I_-^{-b}$, а F отождествим с $P(\mathcal{S}_+)\times_M P(\mathcal{S}_-)$ $\left(\text{вместо } P(\mathcal{S}_+^*)\times_M P(\mathcal{S}_-^*)\right)$, что мы чаще делали раньше): тогда $\pi_1^*(I_\pm)$ переходит в $\mathcal{O}_F(-1,\ 0)$ и $\mathcal{O}_F(0,\ -1)$ соответственно, так что $\pi_1^*(\mathcal{F}(a,\ b)) = \pi_1^*(\mathcal{F})(a,\ b)$. Смена отождествления — это версия преобразования Лежандра, отвечающего (конформной) метрике. Как было показано в § 5, $\Omega^1 F/L = \pi_2^*(\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-)(1, 1)$.

В формулировке следующей теоремы перечислены некоторые группы когомологий вида $H^i(L, \mathcal{E}_L(a, b))$, где $\mathcal{E}_L$ — преобразование Радона — Пенроуза пары $(\mathcal{E}, \nabla)$ на M. Заметим, что в доказательстве сделано больше — вычислены все такие группы.

3. **Теорема.** *Пусть M — малое пространство-время. Тогда для всех значений $(i;\ a, b)$, перечисленных в таблице ниже, имеем*

$$H^i(L, \mathcal{E}_L(a, b)) = \Gamma(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}(i;\ a, b)).$$

Пучок $\mathcal{S}(i;\ a, b)$ стоит в клетке с соответствующим входом.

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

а) *$H^i(\mathcal{E}_L(a, b)) = 0$ при $i \neq 1, 2$ для всех (a, b) из таблицы.*

б) *Пусть $\tilde{\nabla}_3$: $\Gamma(\mathcal{E} \otimes \Omega^3 M) \to \Gamma(\mathcal{E} \otimes \Omega^4 M)$ — дифференциал в последовательности де Рама $\mathcal{E}$, отвечающей ∇. Тогда*

$$H^i(L, \mathcal{E}_L(-3, -3)) = \begin{cases} \operatorname{Ker}\tilde{\nabla}_3 & \textit{при} \quad i = 2, \\ \operatorname{Coker}\tilde{\nabla}_3 & \textit{при} \quad i = 3, \\ 0 & \textit{при} \quad i \neq 2, 3. \end{cases}$$

в) *$\mathcal{S}(i;\ b, a)$ получается из $\mathcal{S}(i;\ a, b)$ заменой $\mathcal{S}_+$ на $\mathcal{S}_-$ и наоборот.*

i	(a, b)			
	$(-1, 0)$	$(-1, -1)$	$(-2, 0)$	$(-2, -1)$
1	$\mathcal{S}_- \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+$	$\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$	$\Lambda^2\mathcal{S}_+$	0
2	0	0	0	0

i	(a, b)		
	$(-2, -2)$	$(-3, -1)$	$(-3, -2)$
1	0	0	0
2	$\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$	$(\Lambda^2\mathcal{S}_+)^2 \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$	$\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$

Доказательство. Применим лемму 2. Полагая в (1) $\mathscr{F}=\mathscr{E}_L(a,\ b)$, находим

$$R^i\pi_{2*}\pi_1^*\mathscr{F}=\mathscr{E}\otimes R^i\pi_{2*}\mathcal{O}_F(a,\ b),$$

$$R^i\pi_{2*}\pi_1^*\mathscr{F}\otimes\Omega^1F/L=\mathscr{E}\otimes R^i\pi_{2*}\mathcal{O}_F(a+1,\ b+1)\otimes$$
$$\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-.$$

Когомологии пучков $\mathcal{O}_F(a,\ b)$ на относительной квадрике таковы. Разделим плоскость $(a,\ b)$ на четыре квадранта крестом прямых $a=-1$ и $b=-1$. На этих прямых все $R^j\pi_{2*}$ равны нулю. В каждом квадранте $R^j\neq 0$ ровно для одного значения j. Эти пучки перечислены ниже:

$$a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0:\ \pi_{2*}\mathcal{O}_F(a,\ b)=S^a(\mathscr{S}_+^*)\otimes S^b(\mathscr{S}_-^*),$$

$$a\leqslant -2,\ b\geqslant 0:\ R^1\pi_{2*}\mathcal{O}_F(a,\ b)=$$
$$=S^{|a|-2}(\mathscr{S}_+)\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes S^b(\mathscr{S}_-^*),$$

$$a\leqslant -2,\ b\leqslant -2:\ R^2\pi_{2*}\mathcal{O}_F(a,\ b)= \qquad (3$$
$$=S^{|a|-2}(\mathscr{S}_+)\otimes S^{|b|-2}(\mathscr{S}_-)\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-,$$

$$a\geqslant 0,\quad b\leqslant -2:\ R^1\pi_{2*}\mathcal{O}_F(a,\ b)=$$
$$=S^a(\mathscr{S}_+^*)\otimes\mathscr{S}^{|b|-2}(\mathscr{S}_-)\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-.$$

Будем писать $D(i;\ a,\ b)$ вместо $D(i;\ \mathscr{E}_L(a,\ b))$. Так как этот оператор переводит $(a,\ b)$ в $(a+1,\ b+1)$, он является нулевым, если либо $(a,\ b)$, либо $(a+1,\ b+1)$ лежит на кресте ацикличных пучков. В силу (2) это приводит к следующим отождествлениям:

$$a=-1:\ H^i(L,\ \mathscr{E}_L(-1,\ b))=$$
$$=\Gamma(\mathscr{E}\otimes R^i\pi_{2*}\mathcal{O}_F(0,\ b+1)\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-),$$

$$a=-2:\ H^i(L,\ \mathscr{E}_L(-2,\ b))=\Gamma(\mathscr{E}\otimes R^i\pi_{2*}\mathcal{O}_F(-2,\ b)).$$

С учетом (3) и симметрии $(a,\ b)\leftrightarrow(b,\ a)$ получаем, в частности, все группы, перечисленные в таблице.

В оставшихся случаях пространства когомологий, вообще говоря, не являются просто сечениями когерентных пучков на пространстве-времени, а описываются как ядра или коядра дифференциальных операторов. Сначала перечислим те пространства, которые могут быть ненулевыми, упорядочив их по значениям i:

$i = 0;\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$:

$$H^0(\mathcal{E}_L(a, b)) = \operatorname{Ker} D(0;\ a, b)\colon\ \Gamma\left(\mathcal{E} \otimes S^a(\mathcal{S}_+^*) \otimes S^b(\mathcal{S}_-^*)\right) \to \Gamma\left(\mathcal{E} \otimes S^{a+1}(\mathcal{S}_+^*) \otimes S^{b+1}(\mathcal{S}_-^*) \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-\right);$$

$i = 1,\quad a \leqslant -3,\quad b \geqslant 0,$ либо $a \geqslant 0,\quad b \leqslant -3$:

$H^1(\mathcal{E}_L(a, b)) = \operatorname{Ker} D(1;\ a, b)$;

$i = 2,\quad a \leqslant -3,\quad b \geqslant 0,$ либо $a \geqslant 0,\quad b \leqslant -3$:

$H^2(\mathcal{E}_L(a, b)) = \operatorname{Coker} D(1;\ a, b)$;

$i = 2,\quad a \leqslant -3,\quad b \leqslant -3$:

$H^2(\mathcal{E}_L(a, b)) = \operatorname{Ker} D(2;\ a, b)$;

$i = 3,\quad a \leqslant -3,\quad b \leqslant -3$:

$H^3(\mathcal{E}_L(a, b)) = \operatorname{Coker} D(2;\ a, b)$.

Теперь скажем несколько слов о структуре операторов $D(i;\ a, b)$. Все пучки $\mathcal{E} \otimes R^i\pi_{2*}\mathcal{O}_F(a, b)$, как видно из (3), содержатся в тензорной алгебре, порожденной $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$. На этой тензорной алгебре действует связность D, порожденная ∇, ∇_+ и ∇_-. Наше утверждение состоит в том, что любой из операторов $D(i;\ a, b)$ определяется в виде композиции ковариантного дифференциала $D\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \Omega^1$ и последующей проекции, построенной из операторов симметризации нужной структуры. Например,

$$D(0;\ 0, 0)\colon\ \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma\left(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_+^* \otimes \mathcal{S}_-^* \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-\right) = \Gamma(\mathcal{E} \otimes \Omega^1 M)$$

есть просто ∇, а оператор

$$D(2;\ -3, -3)\colon\ \Gamma(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_+ \otimes \mathcal{S}_- \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-) \to \Gamma(\mathcal{E} \otimes (\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-)^2)$$

пропорционален ∇_3, с учетом отождествлений

$$\Omega^3 M = \mathcal{S}_+ \otimes \mathcal{S}_- \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-,$$
$$\Omega^4 M = (\Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-)^2.$$

(Это доказывает утверждение б) теоремы.) В проверке этого используется отсутствие кручения: существенный момент состоит в том, что композиция ковариантного дифференциала ∇^g: $\Omega^1 M \to \Omega^1 M \otimes \Omega^1 M$ и антисимметризации при отсутствии кручения совпадает с внешним дифференциалом. Этот эффект продолжает действовать в старших членах последовательности де Рама. ■

Теперь мы вычислим группу когомологий, которая классифицирует «первые окрестности» L, т. е. простые расширения структурного пучка вида (см. § 6)

$$0 \to I \to \mathcal{O}_{L(1)} \to \mathcal{O}_L \to 0.$$

Напомним, что в плоском случае есть каноническая система окрестностей всех порядков.

4. Теорема. *Если M малое, то существует изоморфизм*:

$$H^1(L, \mathcal{T}L \otimes I) = \Gamma(\mathcal{O}_M \oplus \Omega^1 M \oplus \Omega^2 M).$$

Доказательство. В действительности, мы не установим канонического изоморфизма с прямой суммой справа, а только определим инвариантную фильтрацию с такими факторами; над штейновым M она расщепляется.

Чтобы применить лемму 2, надо вычислить прямые образы на M пучков $\pi_1^*(\mathcal{T}L \otimes I)$ и $\pi_1^*(\mathcal{T}L \otimes I \otimes \Omega^1 F/L) = \pi_1^*(\mathcal{T}L) \otimes \pi_2^*(\Lambda^2 \mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2 \mathcal{S}_-)$. Соображения из п. 7.4 показывают, что имеется точная последовательность $0 \to \mathcal{N} \to \pi_1^*\Omega^1 L \xrightarrow{\text{res}} \Omega^1 F/M \to 0$, откуда

$$0 \to \mathcal{T}F/M \to \pi_1^*\mathcal{T}L \to \mathcal{N}^* \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{T}F/M \otimes I \to \pi_1^*(\mathcal{T}L \otimes I) \to \mathcal{N}^* \otimes I \to 0.$$

Пучок $\mathcal{T}F/M$ имеет единственный ненулевой прямой образ:

$$\pi_{2*}\mathcal{T}F/M = (\mathcal{S}_+^* \otimes \mathcal{S}_+)_0 \oplus (\mathcal{S}_-^* \otimes \mathcal{S}_-)_0,$$

где нулик обозначает бесследную часть. Поэтому

$$\pi_{2*}\mathcal{T}F/M \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_- = \\ = S^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_- \oplus \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes S^2\mathcal{S}_- = \Omega^2 M.$$

Пучок $\mathcal{T}F/M \otimes I$ ацикличен над M.

Далее, $\mathcal{N}$, по определению, входит в точную последовательность

$$0 \to \mathcal{T}F/L \to \pi_2^*\mathcal{T}M \to \mathcal{N}^* \to 0,$$

откуда $\mathcal{T}M = \pi_{2*}\mathcal{N}^*$ в силу ацикличности $\mathcal{T}F/L$, и

$$\begin{aligned}\delta\colon R^1\pi_{2*}\mathcal{N}^*\otimes I \xrightarrow{\sim} R^2\pi_{2*}\mathcal{T}F/L\otimes I &= \\ = R^2\pi_{2*}\mathcal{O}_F(-2, -2)\otimes\Lambda^2\mathcal{S}^*_+\otimes\Lambda^2\mathcal{S}^*_- &= \mathcal{O}_M.\end{aligned}$$

Остальные прямые образы $\mathcal{N}^*\otimes I$ равны нулю. Окончательно, полагая $\mathcal{F} = \mathcal{T}L\otimes I$, $i = 1$, в (2), получаем следующие точные последовательности и отождествления, которые доказывают теорему:

$$\begin{aligned}&0\to\Gamma\big(\pi_{2*}\pi_1^*(\mathcal{T}L\otimes\Omega^1F/L\otimes I)\big)\to\\ &\qquad\to H^1(L, \mathcal{T}L\otimes I)\to\Gamma\big(R^1\pi_{2*}\pi_1^*(\mathcal{T}L\otimes I)\big)\to 0,\\ &0\to\Omega^2M\to\pi_{2*}\pi_1^*(\mathcal{T}L\otimes\Omega^1F/L\otimes I)\to\\ &\qquad\to\mathcal{T}M\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_- = \Omega^1M\to 0,\\ &R^1\pi_{2*}\pi_1^*(\mathcal{T}L\otimes I) = R^1\pi_{2*}\mathcal{N}^*\otimes I = \mathcal{O}_M. \quad\blacksquare\end{aligned}$$

§ 9. Ток поля Янга — Миллса на пространстве нуль-геодезических

1. Постановка задачи. Мы продолжаем рассматривать диаграмму нуль-геодезических малого пространства-времени со структурами, описанными в предыдущем параграфе.

Предположим, что построена башня инфинитезимальных расширений $L = L^{(0)}\subset L^{(1)}\subset L^{(2)}\subset L^{(3)}$, причем идеал $\mathcal{J}$, задающий L в $L^{(3)}$ таков, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 = I$ как $\mathcal{O}_L$-модуль и $L^{(i)}$ задается идеалом $\mathcal{J}^{(i)}$. Рассмотрим янг-миллсовский пучок $\mathcal{E}_L$ на L, являющийся преобразованием Радона — Пенроуза пары $(\mathcal{E}, \nabla)$ на M, и поставим задачу описания его продолжений на $L^{(i)}$.

Нужные группы когомологий описаны в теореме 8.3.

а) $H^2(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L\otimes I) = 0$, поэтому продолжения $\mathcal{E}_L$ на $L^{(1)}$ существуют. На множестве классов всех продолжений действует группа $H^1(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L\otimes I) = \Gamma(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-)$. Выберем один класс $e^{(1)}$ в качестве начального и будем обозначать через $e^{(1)} + h$ результат его сдвига на $h\in\Gamma(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-)$.

б) $H^1(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L\otimes I^2) = 0$, поэтому если какое-нибудь из первых продолжений $\mathcal{E}_L$ на $L^{(1)}$ продолжается на $L^{(2)}$, то это продолжение однозначно. С другой стороны, группа препятствий не равна нулю: это $H^2(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L\otimes I^2) = \Gamma(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}\otimes$

$\otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-)$. Отображение препятствия ω: $H^1 \to H^2$:

$$h \mapsto \omega(e^{(1)} + h)\colon \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_- \to$$
$$\to \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$$

может быть биекцией для подходящей башни $L^{(i)}$. Если это так, то имеется единственный класс h для которого $\omega(e^{(1)} + h) = 0$, т. е. единственное продолжение $\mathcal{E}_L^{(1)}$, допускающее продолжение $\mathcal{E}_L^{(2)}$, которое также единственно.

в) Пусть выполнены условия б), $e^{(2)}$ — класс $\mathcal{E}_L^{(2)}$. Препятствие к третьему продолжению $\omega(e^{(2)})$ лежит в группе

$$H^2(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L \otimes I^3) =$$
$$= \operatorname{Ker} \tilde{\nabla}_3\colon \Gamma(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^3 M) \to \Gamma(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^4 M).$$

В этой же группе лежит элемент, который можно построить непосредственно по $(\mathcal{E}, \nabla)$. Именно, пусть $\Phi(\nabla) = \Phi_+(\nabla) + \Phi_-(\nabla)$. Положим

$$j = \tilde{\nabla}\Phi_+(\nabla) = -\tilde{\nabla}\Phi_-(\nabla).$$

Здесь $\tilde{\nabla}$ — дифференциал в $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^{\cdot} M$; учтено тождество Бьянки $\tilde{\nabla}\Phi(\nabla) = 0$. Равенство $\tilde{\nabla} j = 0$ следует из того, что $\tilde{\nabla}^2$ есть оператор коммутирования с $\Phi(\nabla)$. Элемент j называется аксиальным током поля $(\mathcal{E}, \nabla)$.

2. Определение. *Башня расширений $L \subset L^{(i)}$, $i \leqslant 3$, называется правильной, если для любого янг-миллсовского пучка $\mathcal{E}_L$ на M существует его единственное продолжение на $L^{(2)}$, а препятствие к продолжению на $L^{(3)}$ совпадает (с точностью до нормализации) с током поля $(\mathcal{E}, \nabla)$.* ■

Проблема существования и единственности правильной башни для любого пространства нуль-геодезических не решена. Ле Бреп построил первое расширение, которое, судя по всему, является правильным. Основной результат этого параграфа относится к плоскому случаю, где, как уже упоминалось, имеется каноническая башня $L^{(i)}$, отвечающая вложению $L \subset P(T) \times P(T^*)$.

3. Теорема. *Пусть $U \subset G(2;\ T) = M$ — малое пространство-время, $L(U) = \pi_2\pi_1^{-1}(U)$; тогда окрестности $L(U)^{(i)} = \left(L(U),\ \mathcal{O}_{L(i)} \mid L(U)\right)$ образуют правильную башню.*

4. Следствие. *Поле Янга — Миллса $(\mathcal{E}, \nabla)$, определенное в некоторой области плоского пространства-времени,* *является решением системы уравнений Янга — Миллса без источников*

$$\tilde{\nabla}\Phi_{\pm}(\nabla) = 0$$

в том и только том случае, когда у каждой точки его области определения есть такая окрестность U, что преобразование Радона — Пенроуза $\mathcal{E}_L$ на $L(U)$ пары $(\mathcal{E}, \nabla)|U$ допускает продолжение на $L(U)^{(3)}$. ■

Это следствие открывает возможности строить решения нелинейной системы дифференциальных уравнений алгебро-геометрическими средствами. Мы откладываем конструкцию класса ЯМ-пучков на произвольных окрестностях $L(U)^{(i)}$ методом монад до § 4 гл. 5, где эта конструкция описана сразу на суперпространствах. Читатель, желающий ознакомиться с нею немедленно, может прочесть сразу §§ 4 и 5 гл. 5, считая там $N = 0$, т. е. просто опуская все нечетные координаты.

5. Доказательство теоремы 3. Прежде всего, введем тотальное пространство двойного расслоения, связывающего $L^{(i)}$ с M. В качестве него мы возьмем $F^{[i]}$: i-ю инфинитезимальную окрестность F в $P \times \hat{P} \times M$, где $P = P(T)$, $\hat{P} = P(T^*)$. Через $F^{(i)}$ будем обозначать i-ю окрестность F в $L \times M$. Ниже мы постоянно будем сравнивать преобразования Радона — Пенроуза на двух башнях двойных расслоений и их частях, связанных с малым пространством-временем $U \subset M$:

$$\begin{tikzcd}
L^{(i)} & F^{[i]} \arrow[l, "\pi_1^{[i]}"'] \arrow[r, "\pi_2^{[i]}"] & M \\
\cup & \cup & \| \\
L & F^{(i)} \arrow[l, "\pi_1^{(i)}"'] \arrow[r, "\pi_2^{(i)}"] & M.
\end{tikzcd}$$

Покажем сначала, что продолжения $\mathcal{E}_L^{(i)}$ пучка $\mathcal{E}_L$ на $L(U)^{(i)}$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с продолжениями $\left(\mathcal{E}_F^{[i]}, \nabla_{F/L}^{[i]}\right)$ пары $(\mathcal{E}_F, \nabla_{F/L})$ на $F(U)^{[i]}$. Здесь $\nabla_{F/L}^{[i]}$ означает такую относительную связность вдоль слоев $\pi_1^{[i]}$, которая при ограничении на $\mathcal{E}_{F^{(i)}} = \pi_1^{*(i)}(\mathcal{E}_L)$ совпадает со стандартной связностью $\nabla_{F/L}^{(i)}$, аннулирующей сечения $\mathcal{E}_L$, поднятые на $F^{(i)}(U)$.

Если $\mathcal{E}_L^{(i)}$ задано, то, по определению, $\mathcal{E}_F^{[i]} = \pi_1^{[i]*}\mathcal{E}_L^{(i)}$, $\nabla_{F/L}^{[i]}$ — дифференцирование вдоль слоев проекции $\pi_1^{[i]}$.

Несколько больше работы с доказательством корректности обратного отображения: $\left(\mathscr{E}_F^{[i]}, \nabla_{F/L}^{[i]}\right) \mapsto \pi_{1*}^{[i]}\left(\operatorname{Ker} \nabla_{F/L}^{[i]}\right) = \mathscr{E}_L^{(i)}$. При $i = 0$ это уже известно. Проведем индуктивный переход от $i-1$ к i. Прежде всего, имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_{F[i-1]}(-1, -1) \to \mathcal{O}_{F[i]} \to \mathcal{O}_{F(i)} \to 0.$$

Пользуясь ею и результатами § 6, получаем, что по продолжению $\left(\mathscr{E}_F^{[i]}, \nabla_{F/L}^{[i]}\right)$ можно построить коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_F^{[i-1]}(-1, -1) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & \mathscr{E}_F^{[i]} \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_{F/L}^{[i]}"] & \mathscr{E}_F^{(i)} \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_{F/L}^{(i)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{\mathscr{E}_F{}^{[i-1]} \otimes \Omega^1 F^{[i-1]}}{L^{[i-1]}(-1, -1)} \arrow[r] & \mathscr{E}_F^{[i]} \otimes \Omega^1 F^{[i]}/L^{[i]} \arrow[r] & \mathscr{E}_F^{(i)} \otimes \Omega^1 F^{(i)}/L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Здесь через Δ обозначена индуцированная связность. Подкрутив ее на (1, 1), получим ограничение $\nabla_{F/L}^{[i-1]} = \nabla_{F/L}^{[i]} | F^{[i-1]}$. По индуктивному предположению, пара $\left(\mathscr{E}_F^{[i-1]}, \nabla_{F/L}^{[i-1]}\right)$ определяет продолжение $\mathscr{E}_L^{(i-1)} = \pi_{1*}^{[i-1]}\left(\operatorname{Ker} \nabla_{F/L}^{[i-1]}\right)$, для которого $\mathscr{E}_F^{[i-1]} = \pi_1^{[i-1]*} \mathscr{E}_L^{(i-1)}$, а $\nabla_{F/L}^{[i-1]}$ аннулирует в точности поднятые сечения $\mathscr{E}_L^{(i-1)}$. Пользуясь этим и коммутативностью диаграммы (1), получаем точную последовательность на $F^{[i]}(U)$

$$0 \to \pi_1^{-1}\left(\mathscr{E}_L^{(i-1)}\right)(-1, -1) \to \operatorname{Ker} \nabla_{F/L}^{[i]} \to \pi_1^{-1}(\mathscr{E}_L) \to 0,$$

откуда следует точность последовательности на $L(U)$

$$0 \to \mathscr{E}_L^{(i-1)}(-1, -1) \to \mathscr{E}_L^{(i)} \to \mathscr{E}_L \to 0.$$

Пользуясь леммой Накаямы, отсюда можно заключить индукцией по i, что $\mathscr{E}_L^{(i)}$ локально свободен над $\mathcal{O}_{L(i)}$ и $\mathscr{E}_F^{[i]} = \pi_1^{[i]*} \mathscr{E}_L^{(i)}$. Эквивалентность описываемых категорий и, в частности, биекция множеств их объектов с точностью до изоморфизма устанавливается, как обычно, переходом к тензорным произведениям и их сечениям на $L(U)$ и горизонтальным сечениям на $F(U)$ соответственно.

Теперь займемся задачей продолжения на $F(U)$. Прежде всего, $H^1(F(U), \mathscr{E}nd\mathscr{E}_F \otimes \widetilde{\mathcal{N}}) = 0$, где $\widetilde{\mathcal{N}}$ — конормальный пучок к F в $P\times\widehat{P}\times M$. В самом деле, нетрудно вычислить, что $\widetilde{N}=\pi_2^*\mathscr{S}_+(0,-1)\oplus\pi_2^*\mathscr{S}_-(-1,0)$, так что $R^1_{\pi_{2*}}\widetilde{\mathscr{N}}=0$, после чего спектральная последовательность Лере для π_2 дает требуемое, как в § 8. Следовательно, имеется единственное продолжение $\mathscr{E}_F^{[1]}$ на $F(U)^{[1]}$, а именно $\pi_2^{[1]*}(\mathscr{E})$. Оно же является единственным продолжением $\mathscr{E}_F^{(1)}=\pi_2^{(1)*}(\mathscr{E})$. Поэтому неоднозначность продолжения $\mathscr{E}_L$ на $L(U)^{(1)}$, отмеченная в п. 1, на $F(U)$ сказывается в неоднозначности продолжения $\nabla^{(1)}_{F/L}$ до $\nabla^{[1]}_{F/L}$. Существование продолжения следует из существования $\mathscr{E}_L^{(1)}$. Разность двух продолжений лежит в группе

$$H^0(F(U),\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\Omega^1F/L(-1,-1))=$$
$$=\Gamma(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}\otimes\Lambda^2\mathscr{L}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{L}_-),$$

в согласии с вычислением в п. 1.

Далее, $\mathscr{E}_F^{[1]}$ допускает продолжение на $F(U)^{[2]}$, например, как $\pi_2^{[2]*}(\mathscr{E})$, и это продолжение удовлетворяет условию подъема эндоморфизмов. Поэтому на множестве всех продолжений эффективно действует группа $H^1(F(U),\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes S^2\widetilde{\mathscr{N}})=\Gamma(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}\otimes\Omega^2M)$ по предыдущему вычислению $\widetilde{\mathscr{N}}$. Поскольку сюръекция $\widetilde{\mathscr{N}}\to\mathscr{N}$ индуцирует изоморфизм этой группы с $H^1(F(U),\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes S^2\mathscr{N})$, имеется ровно столько же продолжений $\mathscr{E}_F^{(1)}$ до $\mathscr{E}_F^{(2)}=\pi_1^*(\mathscr{E}_L)\,|\,F^{(2)}$. Следовательно, имеется ровно одно продолжение $\mathscr{E}_F^{[2]}$, для которого $\mathscr{E}_F^{[2]}\,|\,F^{(2)}=\mathscr{E}_F^{(2)}$. После этого проверяется, что и группа препятствий, и группа продолжений связности $\nabla_F^{(2)}$ до $\nabla_F^{[2]}$ равны нулю:

$$H^i\big(F(U),\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes\Omega^1F^{[1]}/L^{[1]}(-1,-1)\big)=0$$
$$\text{для } i=0,1.$$

Таким образом, пара $\big(\mathscr{E}_F^{[2]},\nabla_F^{[2]}\big)$ единственна. Она и определяет единственное продолжение $\mathscr{E}_L$ до $\mathscr{E}_L^{(2)}$.

Остается вычислить $\omega\big(\mathscr{E}_L^{(2)}\big)$. Это вычисление мы проведем в несколько шагов. Прежде всего, подъем этого препятствия на F превращает его в элемент группы $H^2(F(U),\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F(-3,-3))$ (лежащий в ядре $\widetilde{\nabla}_3$ в силу отождествлений теоремы 8.3).

С другой стороны, инфинитезимальное расширение $F^{(1)}\subset F^{(3)}$ определено идеалом с нулевым квадратом $\mathscr{K}^2/\mathscr{K}^4$, где

$\mathscr{K}$ — идеал F в $L\times M$. Продолжение $\pi_2^{(3)*}(\mathscr{E})$ пучка $\mathscr{E}_F^{(1)}$ удовлетворяет условию подъема эндоморфизмов. Поэтому группа $H^1(F(U),\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)}\otimes\mathscr{K}^2/\mathscr{K}^4)$ в точности классифицирует продолжения $\mathscr{E}_F^{(1)}$ на $F^{(3)}$ разностными классами с $\pi_2^{(3)*}(\mathscr{E})$. Рассмотрим точную последовательность (J — идеал F в $P\times\widehat{P}\times M$)

$$0\to\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes J/J^3(-1,\,-1)\to$$
$$\to\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes J^2/J^4\to\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)}\otimes\mathscr{K}^2/\mathscr{K}^4\to 0$$

и отвечающий ей граничный гомоморфизм

$$\delta\colon H^1\big(F(U),\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)}\otimes\mathscr{K}^2/\mathscr{K}^4\big)\to$$
$$\to H^2\big(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes J/J^3(-1,\,-1)\big).$$

Он переводит разностный класс произвольного продолжения $\mathscr{E}_F^{(3)}$ в некоторый элемент $\varphi(\mathscr{E})\in H^2\big(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes J/J^3(-1,\,-1)\big)$.

Наконец, композиция отображений

$$\mathscr{O}(-3,\,-3)\to J^2/J^3(-1,\,-1)\to J/J^3(-1,\,-1)$$

(первое происходит из $0\to\mathscr{O}(-1,\,-1)\to\widetilde{\mathscr{N}}\to\mathscr{N}\to 0$ и затем $0\to\mathscr{O}(-2,\,-2)\to S^2\widetilde{\mathscr{N}}$) переводит $\omega\big(\mathscr{E}_L^{(2)}\big)$ в ту же группу, что и $\varphi(\mathscr{E})$. Покажем, что здесь уже оба класса совпадают. Мы все время будем пользоваться интерпретацией препятствий как образа разностного класса при граничном отображении (см. § 6).

Продолжения $\mathscr{E}_F^{[2]}$ на $F^{[3]}$ классифицируются элементами группы $H^1(F(U),\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{K}^3/\mathscr{K}^4)$. Она вкладывается в группу $H^1(F(U),\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)}\otimes\mathscr{K}^2/\mathscr{K}^4)$, которая классифицирует продолжения $\mathscr{E}_F^{(1)}$ на $F^{(3)}$. Поэтому можно считать, что разность $\mathscr{E}_F^{[3]}\,|\,F^{(3)}$ и $\mathscr{E}_F^{(3)}$ как продолжений $\mathscr{E}_F^{(2)}$ лежит в группе $H^1(F(U),\ \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{K}^3/\mathscr{K}^4)$. Теперь рассмотрим точную последовательность

$$0\to\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes J^2/J^3(-1,\,-1)\to$$
$$\to\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes J^3/J^4\to\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{K}^3/\mathscr{K}^4\to 0.$$

Отвечающий ей граничный гомоморфизм

$$\delta\colon H^1\,(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{K}^3/\mathscr{K}^4)\to H^2(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes J^2/J^3(-1,\,-1))\simeq$$
$$\simeq H^2\big(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes J^2/J^3(-1,\,-1)\big)$$

переведет разностный класс $[\mathscr{E}_F^{[3]} | F^{(3)}] - [\mathscr{E}_F^{(3)}]$ в класс $[\mathscr{E}_F^{(3)}] - [\pi_2^{(3)*}\mathscr{E}]$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \pi_1^* I^3 = \mathcal{O}_F(-3,-3) \arrow[r] \arrow[d] & J^3/J^4 \arrow[r] \arrow[d] & (J^3/J^4)/\mathcal{O}_F(-3,3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_{12}^*\Omega^1(P\times\widehat{P})\times\mathcal{O}_F/J^3 \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1(P\times\widehat{P}\times M)\otimes\mathcal{O}_F/J^3 \arrow[r] \arrow[d] & \pi_2^*\Omega^1 M\otimes\mathcal{O}_F J^3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi^{[2]*}\Omega^1 L^{[2]} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1 F^{[2]} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1 F^{[2]}/L^{[2]} \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

Рассматриваемые ниже группы когомологий связаны отображениями, которые индуцированы стрелками этой диаграммы. Класс $\mathscr{E}_F^{[3]}$ в группе $H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[2]}\otimes\Omega^1(P\times\times\widehat{P}\times M))$ переходит в класс $\mathscr{E}_F^{[2]}$ в группе $H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[2]}\otimes\Omega^1 F^{[2]})$. Туда же переходит класс $\mathscr{E}_L^{(2)}$, поскольку $\mathscr{E}_F^{[2]} = \pi_2^{[2]*}\mathscr{E}_L^{(2)}$. Из того, что $\mathscr{E}_F^{(3)} = \pi_2^{(3)*}\mathscr{E}_L$, следует, что образ класса $\mathscr{E}_F^{[3]}$ в группе $H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(2)}\otimes\pi_2^*\Omega^1 M)$ совпадает с разностью между $\mathscr{E}_F^{[3]} | F^{(3)}$ и $\mathscr{E}_F^{(3)}$.

Несложное вычисление показывает, что естественный гомоморфизм $(J^3/J^4)/\mathcal{O}(-3, -3) \to \mathscr{K}^3/\mathscr{K}^4$ индуцирует изоморфизмы всех прямых образов этих пучков на M, причем лишь $R^1\pi_{2*}$ отличен от нуля. Поэтому разность между $\mathscr{E}_F^{[3]} | F^{(3)}$ и $\mathscr{E}_F^{(3)}$ в группе $H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{K}^3/\mathscr{K}^4)$ может быть переведена в $H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes(J^3/J^4)/\mathcal{O}_F(-3, -3))$, после чего к ней можно применить граничный гомоморфизм первой строки диаграммы (2). Результатом будет образ в группе $H^2(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F(-3, -3))$ препятствия $\omega(\mathscr{E}_L^{(2)})$. Чтобы проверить его совпадение с разностью $[\mathscr{E}_F^{[3]} | F^{(3)}] - [\mathscr{E}_F^{(3)}]$ после перевода в группу

$H^2(F(U),\ \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_F\otimes J^2/J^3(-1,\ -1))$, остается воспользоваться коммутативной диаграммой с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_F(-3,-3) \arrow[r] \arrow[d] & J^3/J^4 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (J^3/J^4)/\mathcal{O}_F(-3,-3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^2/J^3(-1,-1) \arrow[r] & J^3/J^4 \arrow[r] & \mathcal{K}^3/\mathcal{K}^4 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Первый шаг вычислений на этом закончен: $\omega(\mathcal{E}_L^{(2)})$ описано в терминах некоторого продолжения $\mathcal{E}_F^{[3]}$. Будем описывать его с помощью некоторых матричных функций g_{ij}, определенных $\operatorname{mod} J^4$ на $P\times\widehat{P}\times M$ и удовлетворяющих условиям

$$g_{ij}^{-1}d_{P\times\widehat{P}\times M/P\times\widehat{P}}\,g_{ij}\in J\pi_2^*\Omega^1M.$$

Пусть φ — разность между $\mathcal{E}_F^{[3]}$ и $\pi_2^{[3]*}\mathcal{E}$ в группе $H^1(F(U),\ \mathcal{E}nd\ \mathcal{E}_F^{[1]}\otimes J^2/J^4)$, а $d\varphi$ — ее образ в группе $H^1(F(U),\ \mathcal{E}nd\ \mathcal{E}_F^{[2]}\otimes\pi_2^{[2]*}\Omega^1M)$. Вычисление в терминах коцикла g_{ij} показывает, что $-d\varphi$ совпадает с классом $\mathcal{E}_F^{[3]}$ в этой группе, построенном с помощью композиции отображений

$$\mathrm{GL}\left(\mathcal{O}_{F^{[3]}}\right)\to M\left(\Omega^1(P\times\widehat{P}\times M)\otimes\mathcal{O}_F^{[3]}\right)\to$$
$$\to M\left(\pi_2^*\Omega^1M\otimes\mathcal{O}_{F^{[3]}}\right).$$

Построим теперь коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J^3/J^4 \arrow[r] \arrow[d] & J^2/J^4 \arrow[r] \arrow[d] & J^2/J^3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}^3/\mathcal{K}^4 \arrow[r] & \pi_2^*\Omega^1M\otimes\mathcal{K}/\mathcal{K}^3 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

где $\mathcal{F}$ определяется как коядро соответствующей стрелки, средний вертикальный морфизм есть композиция $J^2/J^4\to\to\pi_2^*\Omega^1M\otimes J/J^3\to\pi_2^*\Omega^1M\otimes\mathcal{K}/\mathcal{K}^3$, а правый вертикальный морфизм индуцирован этой композицией. Вычисления показывают, что для всех пучков этой диаграммы $R^i\pi_{2*}=0$ при $i\neq 1$. Поэтому, применив к ней $R^1\pi_{2*}$, получаем снова коммутативную диаграмму с точными строками. В ее правом столбце стоят пучки

$$R^1\pi_{2*}J^2/J^3=\Omega^2M,\qquad R^1\pi_{2*}\mathcal{F}=\Omega^3M,$$

связанные внешним дифференциалом d_2. Коядро левой вертикальной стрелки для пучков $R^1\pi_{2*}$ отождествляется с $R^2\pi_{2*}J^2/J^3(-1, -1)=\Omega^3M$. Поэтому лемма о змее в применении к $R^1\pi_{2*}$-диаграмме доставляет некоторое отображение

$$\operatorname{Ker} d_2 \to \Omega^3 M.$$

Его можно вычислить непосредственно и убедиться, что оно с точностью до нормализации переводит $\Phi_+ + \Phi_-$ в $d\Phi_+$. Умножив диаграмму (3) тензорно на $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}$ и применив $R^1\pi_{2*}$, мы получим аналогичные результаты с заменой d на $\tilde{\nabla}$ в последовательности де Рама для $(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}, \tilde{\nabla})$. Остается проследить за судьбой отмеченных элементов в фигурирующих здесь группах когомологий.

При отображении змеи

$$\begin{aligned} s\colon \operatorname{Ker}\big(H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes J^2/J^3) \to{}& \\ \to H^1\big(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{[1]}\otimes\mathscr{F}\big)\big) &\to H^2(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes \\ &\qquad\otimes J^2/J^3(-1, -1)) \end{aligned}$$

разность между $\mathscr{E}_F^{[2]}$ и $\pi_2^{[2]*}\mathscr{E}$ отображается в образ препятствия $\omega\big(\mathscr{E}_L^{(2)}\big)$ во второй группе. С другой стороны, следующие изоморфизмы позволяют воспользоваться теоремой 7.5 для отождествления этого разностного класса с кривизной $\Phi(\nabla)$:

$$\begin{aligned} &H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes J^2/J^3) \xrightarrow{\sim} \\ &\quad\xrightarrow{\sim} H^1(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes\mathscr{K}^2/\mathscr{K}^3) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}\otimes\Omega^2M). \end{aligned}$$

Далее, как при вычислениях с $\mathscr{E}_F=\mathcal{O}_F$:

$$\begin{aligned} &H^1\big(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)}\otimes\mathscr{F}\big)=\Gamma(U, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}\otimes\Omega^3M), \\ &H^2(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F\otimes J^2/J^3(-1, -1))= \\ &\quad= H^2(F(U), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F(-3, -3))=\Gamma(U, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}\otimes\Omega^3M), \end{aligned}$$

и морфизм змеи s превращается в

$$s(\Phi_+ + \Phi_-)=\tilde{\nabla}_2\Phi_+.$$

Поскольку он переводит $\Phi(\nabla)$ в $\omega\big(\mathscr{E}_L^{(2)}\big)$, это завершает доказательство. ■

§ 10. Задачи продолжения и динамические уравнения

1. Общие замечания. В § 9 мы убедились, что уравнение Янга — Миллса $\widetilde{\nabla}\Phi_+(\nabla) = j$ на малом плоском пространстве-времени кодируется уравнением $\omega(\mathscr{E}_L^{(2)}) = j_L$, где j_L — представитель аксиального тока в группе когомологий $H^2(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_L(-3, -3))$. Здесь мы продемонстрируем, что ряд других задач продолжения в пределах двух-трех этажей правильной башни $L^{(i)}$ инфинитезимальных расширений приводит к серии динамических уравнений для полей разных типов на M. Эта тема снова возникает в §§ 3 и 4 гл. 5 в связи с обсуждением преобразования Радона — Пенроуза для суперсимметричных уравнений.

Нужно сразу же подчеркнуть незавершенность сюжета. Для искривленного пространства-времени не ясна правильная формулировка уравнений Эйнштейна. Как сформулировать более геометрически (анти)автодуальность пучков $\Sigma_\pm$? Как связана с уравнениями Эйнштейна задача существования правильной башни инфинитезимальных расширений $L^{(i)}$?

Поэтому ниже мы ограничимся описанием части известных результатов, опустив явные вычисления операторов препятствия к продолжению, по поводу которых отошлем читателя к журнальным статьям.

2. Обратимые пучки на $L^{(i)}$. В формулировках задач продолжения нам понадобятся канонические продолжения не только ЯМ-пучков $\mathscr{E}_L$, но также $\mathcal{O}_L(a, b) = I_+^{-a} \otimes I_-^{-b}$. В плоском случае вложение $L \subset P \times \widehat{P}$ определяет естественный выбор. В искривленном случае небольшое усиление условия правильности позволяет определить эти продолжения.

Именно, пусть задана некоторая башня простых расширений $L \subset L^{(1)} \subset L^{(2)}$ с помощью I и I^2 соответственно. Поскольку $H^2(I) = 0$, из точной последовательности $0 \to I \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{L(1)}^* \to \mathcal{O}_L^* \to 1$ находим

$$0 \to H^1(I) \to \operatorname{Pic} L^{(1)} \to \operatorname{Pic} L \to 0. \qquad (1)$$

Далее, из точной последовательности $0 \to I^2 \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{L(2)}^* \to \mathcal{O}_{L(1)}^* \to 1$, с учетом $H^1(I^2) = 0$, $H^2(I^2) = \Gamma(\Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_-)$, получаем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Pic} L^{(2)} \to \operatorname{Pic} L^{(1)} \to H^2(I). \qquad (2)$$

Ограничим последнюю стрелку в (2) на подгруппу $H^1(I)$ в (1). Получим характеристический гомоморфизм башни

$$\delta\colon H^1(I) \to H^2(I^2). \tag{3}$$

Предположим, что он является изоморфизмом (в плоском случае для стандартной башни это так). Тогда из (1) и (2) находим канонические изоморфизмы $\operatorname{Pic} L^{(1)} = \operatorname{Pic} L \oplus H^1(I)$, $\operatorname{Pic} L^{(2)} = \operatorname{Pic} L$. В частности, пучки $\mathcal{O}_L(a, b)$ допускают стандартное продолжение на $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$. Поскольку $H^1(L, I^k) = 0$ при $k \geqslant 3$, дальнейшие продолжения $\mathcal{O}_L(a, b)$ в любой башне единственны, если существуют.

Дальше мы будем предполагать, что (3) есть изоморфизм и что отмечены соответствующие продолжения $\mathcal{O}_{L^{(i)}}(a, b)$, $i \leqslant 3$.

Заметим, что (3) есть также отображение, которое ставит в соответствие первому продолжению тривиального ЯМ-пучка $\mathcal{O}_L$ препятствие к его второму продолжению. Для любого ЯМ-пучка $\mathcal{E}_L$ аналогичное отображение $\delta_L\colon H^1(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L \otimes I) \to H^2(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L \otimes I^2)$ есть $\mathrm{id} \otimes \delta$. Поэтому существование канонических вторых продолжений $\mathcal{E}_L^{(2)}$ здесь также обеспечено.

3. Продолжение классов когомологий. В сделанных предположениях по ЯМ-пучку $\mathcal{E}_L$ строятся пучки $\mathcal{E}_L^{(i)}(a, b)$, $i \leqslant 3$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{E}_L(a - i - 1, b - i - 1) \to \mathcal{E}_L^{(i+1)}(a, b) \to \\ \to \mathcal{E}_L^{(i)}(a, b) \to 0. \tag{4}$$

Она индуцирует кограничное отображение

$$\delta(\mathcal{E}_L(a, b); i, k)\colon H^k(\mathcal{E}_L^{(i)}(a, b)) \to \\ \to H^{k+1}(\mathcal{E}_L(a - i - 1, b - i - 1)),$$

а также отображение

$$H^k(\mathcal{E}_L^{(i+1)}(a, b)) \to \operatorname{Ker} \delta(\mathcal{E}_L(a, b); i, k),$$

которое является изоморфизмом при условии, что $H^k(\mathcal{E}_L(a - i - 1, b - i - 1)) = 0$. Выбирая по-разному a, b; i, k и отождествляя группы когомологий на L с сечениями пучков на M с помощью результатов § 8, мы можем получить в качестве δ стандартные операторы теории поля. Ниже мы ограничимся отождествлением их символов, ибо в искривленном случае мы никак не связали структуру башни $L^{(i)}$ с кривизной M.

4. Оператор Дирака. Положим $(a, b) = (-1, 0)$, $i = k = 1$. Из точной последовательности (4) с $i = 0$ и вычислений § 8 находим

$$H^1\big(\mathscr{E}_L^{(1)}(-1, 0)\big) = H^1(\mathscr{E}_L(-1, 0)) = \Gamma(\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_-\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+),$$

$$H^2(\mathscr{E}_L(-3, -2)) = \Gamma(\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-),$$

$$H^1(\mathscr{E}_L(-3, -2)) = 0.$$

Следовательно,

$$H^1\big(\mathscr{E}_L^{(2)}(-1, 0)\big) = \operatorname{Ker}\delta(\mathscr{E}_L(-1, 0);\ 1,1):$$

$$\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_-\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+ \to \mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-.$$

Символ этого оператора δ вычисляется без особого труда, что позволяет отождествить его с двукомпонентным оператором Дирака на фоне поля Янга — Миллса $\mathscr{E}$. Второй оператор отвечает $(a, b) = (0, -1)$. Когомологическое вычисление пространства нулевых мод Дирака можно эффективно применить к инстантонному пучку $\mathscr{E}$, заданному в явном виде своей монадой, поднятой на L. Однако удобнее сделать это иначе.

5. Другое описание оператора Дирака. Преимущество описания, которое мы дадим сейчас, состоит в том, что достаточно располагать спинорными пучками $\Sigma_\pm$ на L. Умножим тензорно на $\mathscr{E}_L(-2, 0)$ точную последовательность $0 \to \mathcal{O}_L(-1, 0) \to \Sigma_+ \to \mathcal{O}_L(1, 0) \to 0$ и напишем точную когомологическую последовательность. Учитывая вычисления § 8, получим

$$0 \to H^1(\mathscr{E}_L(-3, 0)) \to H^1(\mathscr{E}_L\otimes\Sigma_+(-2, 0)) \to$$

$$\Vert$$

$$\operatorname{Ker} D(1; \Sigma_+(-2, 0)) = \Gamma(\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+) \xrightarrow{D_+}$$

$$\to H^1(\mathscr{E}_L(-1, 0)) \to H^2(\mathscr{E}_L(-3, 0)) \to 0$$

$$\begin{array}{l} {}^{D_+}\qquad\ \Vert \\ \to\quad \Gamma(\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_-\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+). \end{array}$$

Чтобы отождествить D_+ с оператором Дирака, следует поднять всю картину на F и провести диаграммный поиск в таблице когомологий, связанных с диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \pi_1^{-1}\,\mathcal{O}_L(-3,0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_F(-3,0) \arrow[r, "\overset{+}{\nabla}_{F/L}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_F(-2,1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1^{-1}(\Sigma_+(-2,0)) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_2^*\mathscr{P}_+(-2,0) \arrow[r, "\overset{+}{\nabla}_{F/L}"] \arrow[d] & \pi_2^*\mathscr{P}_+(-1,1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1^{-1}(\mathcal{O}_L(-1,0)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_F(-1,0) \arrow[r, "\overset{+}{\nabla}_{F/L}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_F(0,1) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Пользуясь этим результатом, получаем следующее описание нулевых мод и коядра:

$$H^1(\mathscr{E}_L(-3,\ 0)) = \operatorname{Ker} D_+,\qquad H^2(\mathscr{E}_L(-3,\ 0)) = \operatorname{Coker} D_+.$$

6. Оператор Клейна — Гордона. Положим $(a, b) = (-2, 0)$, $i = 0$, $k = 1$ в (4). По таблице в § 8 находим

$$H^1(\mathscr{E}_L(-2,\ 0)) = \Gamma(\mathscr{E} \otimes \Lambda^2\mathscr{P}_+),$$

$$H^2(\mathscr{E}_L(-3,\ -1)) = \Gamma(\mathscr{E} \otimes (\Lambda^2\mathscr{P}_+)^2 \otimes (\Lambda^2\mathscr{P}_-),$$

$$H^1(\mathscr{E}_L(-3,\ -1)) = 0.$$

Следовательно,

$$H^1\left(\mathscr{E}_L^{(1)}(-2,0)\right) = \operatorname{Ker}\,\delta(\mathscr{E}_L(-2,0);\ \ 0,1):$$
$$\Gamma(\mathscr{E}\otimes\Lambda^2\mathscr{P}_+) \to \Gamma\left(\mathscr{E}\otimes(\Lambda^2\mathscr{P}_+)^2\otimes\Lambda^2\mathscr{P}_-\right).$$

Здесь δ — дифференциальный оператор второго порядка, симовол которого совпадает с умножением на метрику. Таким образом, мы вычислили нулевые моды оператора Клейна — Гордона.

7. Некоторые нелинейные системы. В пп. 4 и 5 мы представляли скалярные и спинорные поля на M классами когомологий на L и затем интегрировали динамические уравнения как задачи продолжения для этих классов. Однако сами классы когомологий могут кодировать различные геометрические объекты на L, например расширения пучков или те же продолжения. Это открывает возможность кодировать задачами продолжения и нелинейные системы. Здесь мы опишем одну схему, разработанную Г. М. Хенкиным для плоского случая.

Пусть $(\mathscr{E}_i,\ \nabla_i)$, $i = 1,\ 2,$ — два поля Янга — Миллса на M, $\mathscr{E}_{iL}$ — их преобразования Радона — Пенроуза. Положим $\mathscr{F}_L = \mathscr{E}_{1L}(-1,\ 0) \oplus \mathscr{E}_{2L}(0,\ -1)$ и рассмотрим продолжения этого пучка на этажи правильной башни.

а) *Первое продолжение.* Оно безусловно существует. Более того, имеется каноническое продолжение, и для него выполнено условие подъема эндоморфизмов. Поэтому имеется биекция между классами продолжений $\mathcal{F}_L^{(1)}$ и элементами пространства

$$
\begin{aligned}
&H^1(\mathcal{E}nd\,\mathcal{F}_L(-1,-1)) =\\
&\quad = H^1((\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{1L}\oplus\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{2L})(-1,-1)\oplus\\
&\qquad \oplus\mathcal{E}_{1L}^*\otimes\mathcal{E}_{2L}(0,-2)\oplus\mathcal{E}_{1L}\otimes\mathcal{E}_{2L}^*(-2,0)) =\\
&\quad = \Gamma((\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_2)\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-\oplus\\
&\qquad\qquad \oplus(\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-\oplus\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2^*\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+).
\end{aligned}
$$

Тривиализировав $\Lambda^2\mathcal{S}_\pm$ с помощью $\mathcal{S}_\pm$, мы можем сказать, что первые продолжения $\mathcal{F}_L$ — это то же самое, что скалярные поля в присоединенном представлении структурной группы пучка $\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}'$.

б) *Второе продолжение.* Группа препятствий ко второму продолжению равна

$$
\begin{aligned}
&H^2(\mathcal{E}nd\,\mathcal{F}_L(-2,-2)) =\\
&\quad = H^2((\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{1L}\oplus\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{2L})(-2,-2)\oplus\\
&\qquad \oplus\mathcal{E}_{1L}^*\otimes\mathcal{E}_{2L}(-1,-3)\oplus\mathcal{E}_{1L}\otimes\mathcal{E}_{2L}^*(-3,-1)) =\\
&\quad = \Gamma((\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_2)\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-\oplus(\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2)\otimes\\
&\qquad\qquad \otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes(\Lambda^2\mathcal{S}_-)^2\oplus\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2^*\otimes(\Lambda^2\mathcal{S}_+)^2\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-).
\end{aligned}
$$

Отображение препятствий $\omega\colon H^1\to H^2$ на компонентах со значениями в $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_2$ — это просто $\mathrm{id}\otimes\delta$, где δ — отображение (3). Поэтому пучок $\mathcal{F}_L^{(1)}$, продолжаемый дальше, определяется двумя полями:

$$
\varphi_+\in\Gamma(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2^*\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+),\quad \varphi_-\in\Gamma(\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-),
$$

тогда как первые два скаляра должны быть нулевыми. Обозначим этот пучок через $\mathcal{F}_L^{(1)}(\varphi_+,\varphi_-)$. Его препятствие $\omega(\mathcal{F}_L^{(1)}(\varphi_+,\varphi_-))$ — это поля из третьей и четвертой компонент группы H^2, зависящие от $\varphi_\pm$:

$$
\begin{aligned}
&\psi_+\in\Gamma(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2^*\otimes(\Lambda^2\mathcal{S}_+)^2\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_-),\\
&\psi_-\in\Gamma(\mathcal{E}_1^*\otimes\mathcal{E}_2\otimes\Lambda^2\mathcal{S}_+\otimes(\Lambda^2\mathcal{S}_-)^2).
\end{aligned}
$$

В плоском случае Хенкин вычислил $\psi_\pm$ через $\varphi_\pm$. Чтобы сформулировать его результаты, обозначим через $D_\pm$ операторы Клейна — Гордона в $\mathscr{E}_1\otimes\mathscr{E}_2^*$ и $\mathscr{E}_1^*\otimes\mathscr{E}_2$ соответственно в смысле предыдущего пункта. Далее, заметим, что произведения $\varphi_+\otimes\varphi_-\otimes\varphi_+$ и $\varphi_-\otimes\varphi_+\otimes\varphi_-$ после свертки по индексам среднего сомножителя попадают в ту же группу, где лежат $\psi_\pm$ и $D_\pm\varphi_\pm$. Обозначим их просто $\varphi_+\varphi_-\varphi_+$ и $\varphi_-\varphi_+\varphi_-$.

8. Предложение. *Существует такая ненулевая константа λ, зависящая от нормировки изоморфизмов, что для плоского пространства-времени*

$$\omega\left(\mathscr{F}_L^{(1)}(\varphi_+,\varphi_-)\right)=(D_+\varphi_++\lambda\varphi_+\varphi_-\varphi_+,\ D_-\varphi_-+\lambda\varphi_-\varphi_+\varphi_-).$$

Поэтому условие продолжаемости $\mathscr{F}_L^{(1)}(\varphi_+,\varphi_-)$ на $L^{(2)}$ равносильно системе уравнений

$$D_\pm\varphi_\pm+\lambda\varphi_\pm\varphi_\mp\varphi_\pm=0. \quad \blacksquare \tag{5}$$

В случае $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathcal{O}_M$, $\nabla=d$, $\varphi_+=\varphi_-$ получаем классическое нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$D\varphi+\lambda\varphi^3=0.$$

9. Третье продолжение. Предположим теперь, что $\omega\left(\mathscr{F}_L^{(1)}(\varphi_+,\varphi_-)\right)=0$. Группа, классифицирующая вторые продолжения, как нетрудно убедиться, обращается в нуль. Следовательно, второе продолжение $\mathscr{F}_L^{(2)}(\varphi_+,\varphi_-)$ единственно. Препятствие к третьему продолжению лежит в группе

$$\begin{gathered}H^2(\mathscr{E}nd\,\mathscr{F}_L(-3,-3))=H^2(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_{1L}\oplus\\ \oplus\,\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_{2L}(-3,-3)\oplus\mathscr{E}_{1L}^*\oplus\mathscr{E}_{2L}(-2,4)\oplus\mathscr{E}_{1L}\otimes\\ \otimes\,\mathscr{E}_{2L}^*(-4,-2))=\Gamma\left(\operatorname{Ker}\widetilde{\nabla}_3^{(1)}\oplus\operatorname{Ker}\widetilde{\nabla}_3^{(2)}\oplus\mathscr{E}_1^*\otimes\mathscr{E}_2\otimes\right.\\ \otimes\,\mathscr{S}^2(S_-)\otimes\Lambda^2S_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-\oplus\mathscr{E}_2^*\otimes\mathscr{E}_1\otimes S^2(\mathscr{S}_+)\otimes\\ \hfill\left.\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-\right).\end{gathered}$$

Первые две компоненты $\omega\left(\mathscr{F}_L^{(2)}(\varphi_+,\varphi_-)\right)$ представляют собой токи для полей $(\mathscr{E}_1,\nabla_1)$ и $(\mathscr{E}_2,\nabla_2)$ соответственно, построенные с помощью полей $\varphi_\pm$ так. Пусть вообще ∇ означает связность, сконструированную из ∇_1, ∇_2 на тензорной алгебре, порожденной $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, тогда, в частности, можно построить поля $\nabla\varphi_\pm$ и такие произведения, как $\varphi_+\nabla\varphi_-$: под этим подразумевается свертка $\varphi_+\otimes\nabla\varphi_-$ по $\mathscr{E}_1$. Результат лежит в $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_2\otimes\Omega^1M\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_+\otimes\Lambda^2\mathscr{S}_-$, т. е. в $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_2\otimes\Omega^3M$ при стандартном отождествлении.

В этих условиях имеет место следующий результат.

10. Предложение. *Пучок* $\mathscr{F}^{(2)}_{\mathrm{L}}(\varphi_+, \varphi_-)$ *допускает третье продолжение, если и только если токи* j_1, j_2 *полей Янга — Миллса* ∇_1, ∇_2 *равны*

$$j_1 = (\nabla\varphi_-)\varphi_+ - \varphi_-(\nabla\varphi_+), \qquad j_2(\nabla\varphi_+)\varphi_- - \varphi_+(\nabla\varphi_-),$$

а также обращаются в нуль вторые две компоненты препятствия. ■

§ 11. Функция Грина оператора Лапласа

1. Постановка задачи. Функция Грина для классического оператора Лапласа $D = \sum\limits_{i=1}^{4} \partial^2/(\partial x^a)^2$ есть решение $G(x, y)$ уравнения $D_xG(x, y) = \delta(x - y)$. Если на нее наложено граничное условие убывания до нуля на бесконечности, то $G(x, y) = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{1}{|x-y|^2}$.

Более общо, пусть $D\colon \Lambda^2\mathscr{S}_+ \to (\Lambda^2\mathscr{S}_+)^2 \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_-$ — оператор Клейна — Гордона на малом пространстве-времени. Аналитическим продолжением функции $|x-y|^2$ по x (при фиксированном y) является «квадрат комплексного геодезического расстояния»,— вообще говоря, многозначная аналитическая функция $r^2(x, y)$. Локально вблизи y у нее имеется отмеченная ветвь; уравнение $r^2(x, y) = 0$ определяет световой коноид $C(y)$ точки y, который заметается нуль-геодезическими, проходящими через y.

Адамар охарактеризовал комплексную функцию Грина для D как голоморфное решение уравнения $D_xG(x, y) = 0$ вблизи y с особенностью на $C(y)$ вида $A(x, y)/r^2(x, y) + B(x, y)\log r(x, y)$. Функция A/r^2 определена метрикой однозначно с точностью до умножения на константу. Коэффициент B равен нулю, если G не имеет ветвления в $C(y)$. Таким образом, не ветвящуюся функцию Грина можно охарактеризовать с точностью до умножения на константу и добавления регулярного решения уравнения Клейна — Гордона условием, чтобы она имела на $C(y)$ полюс первого порядка по x.

С небольшими видоизменениями это относится к оператору Клейна — Гордона на фоне поля Янга — Миллса $(\mathscr{E}, \nabla)$. Неветвящаяся функция $G(x, y)$ в этом случае является мероморфным сечением пучка $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+$, имеющим главную часть описанного типа вблизи коноида $C(y)$ и удовлетворяющим уравнению $D_xG(x, y) = 0$ вне $C(y)$.

Цель этого параграфа — описать когомологическими средствами функцию Грина, точнее, ее преобразование Радона — Пенроуза на L, для плоского пространства-времени.

2. Подготовительные конструкции. Пусть сначала M — малое пространство-время, не обязательно плоское. Построим следующую диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
H^1\left(L, \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L^{(1)}(-2, 0)\right) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1\left(L\setminus B(y), \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L^{(1)}(-2, 0)\right) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & {} \\
H^0(M, \operatorname{Ker} D) \arrow[r] & H^0(M\setminus C(y), \operatorname{Ker} D) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & H^2_{B(y)}\left(L, \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L^{(1)}(-2, 0)\right), \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & H^1_{C(y)}(M, \operatorname{Ker} D). &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

В первой строке $B(y)$ означает множество нуль-геодезических, целиком принадлежащих $C(y)$; две группы справа — группы когомологий с носителями, добавленные формально, чтобы сделать строки точными; D: $\mathcal{E}nd\mathcal{E} \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \to \mathcal{E}nd\mathcal{E} \otimes (\Lambda^2\mathcal{S}_+)^2 \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$ — оператор Клейна — Гордона. Изоморфизм двух групп слева был построен в предыдущем параграфе. Вторая вертикальная стрелка, обозначенная здесь через a, получалась бы формально из результатов § 10 и также была бы изоморфизмом, если бы $M\backslash C(y)$ было малым пространством-временем с пространством нуль-геодезических $L\backslash B(y)$. Однако это не так: те нуль-геодезические в M, которые имеют нульмерное непустое пересечение с $C(y)$, перестают быть односвязными в $M\backslash C(y)$.

Поэтому для построения a нужно ввести два промежуточных объекта. Положим

$$F_1(y) = \pi_1^{-1}(B(y)), \quad F_2(y) = \pi_2^{-1}(C(y))$$

и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F\setminus F_1(y) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[dr, "\pi_{11}"'] & F\setminus F_2(y) \arrow[d, "\pi_{12}"] \arrow[dr, "\pi_{22}"] & \\
& L\setminus B(y) & M\setminus C(y)
\end{tikzcd}$$

Слой π_{11} над любой точкой $l \in L\backslash B(y)$ совпадает с $\pi_1^{-1}(l)$, поэтому он связен и односвязен. Следовательно, π_{11} индуцирует изоморфизм

$$H^1\left(L\setminus B(y), \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L^{(1)}(-2, 0)\right) = \\ = H^1\left(F\setminus F_1(y), \pi_{11}^{-1}\left(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_L^{(1)}(-2, 0)\right)\right). \qquad (2)$$

С другой стороны, слои π_{22} являются компактными квадриками, и те же рассуждения, что в § 8, доставляют изоморфизм

$$H^0(M\setminus C(y), \operatorname{Ker} D) = \\ = H^1\left(F\setminus F_2(y), \pi_{11}^{-1}\left(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_L^{(1)}(-2, 0)\right)\right). \quad (3)$$

Правые группы в (2) и (3) связаны морфизмом ограничения. Это и будет a в диаграмме (1).

Третья вертикальная стрелка в (1), по определению, индуцирована a.

Мы хотим построить класс функции Грина в $H^0(M\setminus C(y)$, $\operatorname{Ker} D)$ как образ относительно a некоторого класса когомологий на L. Нам удается сделать это лишь в плоском случае (в действительности достаточно автодуальности). Прежде чем описывать соответствующий класс, проанализируем геометрическую причину этого.

В плоском пространстве-времени $C(y)$ представляет собой гиперплоское сечение квадрики Плюккера $G(2; T)$, а нуль-геодезические являются прямыми. Прямая, целиком лежащая в $C(y)$, либо проходит через y, либо определяет плоскость, натянутую на нее и y, которая пересекается с $G(2; T)$ по трем точкам и потому также лежит в $G(2; T)$. Следовательно, полагая $L\subset P_1\times P_2 = P\times\widehat{P}$, ρ_i: $L\to P_i$ — проекции, $P_i^1(y)\subset P_i$ — прямые, отвечающие $y\in M$, имеем

$$B(y) = B_1(y)\cup B_2(y) = \rho_1^{-1}\left(P_1^1(y)\right)\cup\rho_2^{-1}\left(P_1^1(y)\right).$$

Неприводимые компоненты $B_1(y)$ и $B_2(y)$ трехмерны; $B_1(y)\cap B_2(y) = L(y)$.

В случае общего искривленного пространства следует ожидать, что в $C(y)$ содержатся лишь те нуль-геодезические, которые проходят через y. Это значит, что $B(y) = L(y)$. Поэтому в плоском (и полуплоском) случае $B(y)$ претерпевает скачок коразмерности — с трех до двух. Приводимая ниже конструкция существенно опирается на то, что одну компоненту $B(y)$ можно задать двумя уравнениями.

Пусть $J(y)^{(1)}\subset\mathcal{O}_{L^{(1)}}$ — идеал пересечения $\left(P_1^1(y)\times P_2\right)\cap L^{(1)}$. Обозначим через u, v независимые сечения $\mathcal{O}_L^{(1)}(1, 0)$, обращающиеся в нуль на $P_1^1(y)$. Имеется точный комплекс Кошуля

$$0\to\mathcal{O}_L^{(1)}(-2, 0)\to\mathcal{O}_L^{(1)}(-1, 0)\oplus \\ \oplus\mathcal{O}_L^{(1)}(-1, 0)\xrightarrow{(u,v)} J(y)^{(1)}\to 0.$$

Умножим его тензорно на $\mathscr{E}_L^{(1)}$ и ограничим на $L\backslash B(y)$. Учитывая, что $J(y)^{(1)}|L\backslash B(y)$, мы обозначим через g' и g классы получившегося расширения в группах

$$\operatorname{Ext}^1\bigl(L, \mathscr{E}_L^{(1)} \otimes J(y)^{(1)}, \mathscr{E}_L^{(1)}(-2, 0)) \to \\ \to H^1(L\setminus B(y), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_L^{(1)}(-2, 0)\bigr).$$

3. Теорема. *Класс* $a(g) \in H^0(M\backslash C(y), D)$ *является мероморфным решением уравнения* $D_x G = 0$ *с полюсом первого порядка на* $C(y)$.

Доказательство. Будем рассматривать $a(g)$ как сечение пучка $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+$. Чтобы определить его значение в точке $x \in M\backslash C(y)$, его следует ограничить на квадрику $L(x) = \pi_1\pi_2^{-1}(x)$ и воспользоваться отождествлением $H^1(L(x), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_L(-2, 0)) = \operatorname{End} E(x) \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+(x)$ (ср. вычисления в § 7). Пусть $s = 0$ — уравнение светового конуса $C(y)$. Тогда $\pi_2^*(s) = 0$ — уравнение $F_2(y)$ в F. Из (3) и аналога этого отождествления для M видно, что достаточно проверить, что $\pi_2^*(s)\,g$ продолжается до элемента группы $H^1\bigl(F, \pi_{11}^{-1}(\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_L^{(1)}(-2, 0)\bigr)$.

Пусть $J(y)^{(1)}$ — идеал $F_1(y) = \pi_1^{-1}(B(y))$ в $\mathscr{O}_{F(1)}$. Согласно определению g' представлен на F классом расширения

$$0 \to \mathscr{E}_F^{(1)}(-2, 0) \to \mathscr{E}_F^{(1)}(-1, 0) \oplus \mathscr{E}_F^{(1)}(-1, 0) \to \\ \to \mathscr{E}_F^{(1)} \otimes J_F(y)^{(1)} \to 0.$$

Но идеал $\mathcal{J}_F(y)^{(1)}$, порожденный $\pi_2^*(s)$ и определяющий $F_2(y)$, содержится в $J_F(y)^{(1)}$. Мы можем интерпретировать ограничение g' с $F\backslash F_1(y)$ на $F\backslash F_2(y)$ как морфизм соответствующих групп Ext^1, отвечающий вложению $\mathscr{E}_F^{(1)} \otimes \otimes \widetilde{J}_F(y)^{(1)} \subset \mathscr{E}_F^{(1)} \otimes J_F(y)^{(1)}$. Элемент g есть образ g' при этом морфизме. Но пучок $\mathcal{J}_F(y)^{(1)}$ обратим и порожден $\pi_2^*(s)$. Поэтому g лежит в группе $H^1(F\setminus F_2(y), \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)} \otimes \otimes [\widetilde{J}_F(y)^{(1)}]^{-1}(-2, 0)\bigr)$, являясь ограничением подходящего элемента $\tilde{g}$ из группы $H^1\bigl(F, \mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_F^{(1)} \otimes [\widetilde{J}_F(y)^{(1)}]^{-1}(-2,0)\bigr)$ (а именно, того, который индуцирован g' при замене $J_F(y)^{(1)}$ на $\mathcal{J}_F(y)^{(1)}$). Умножение на $\pi_2^*(s)$ определяет изоморфизм пучков $[\widetilde{J}_F(y)^{(1)}]^{-1} \xrightarrow{\pi_2^*(s)} \mathscr{O}_{F(1)}$. Образ $\tilde{g}$ при индуцированном отображении групп H^1 и является искомым продолжением $\pi_2^*(s)\,g$. ■

Мы оставляем читателю проверку того, что построенное решение уравнения Клейна — Гордона действительно имеет сингулярность на $C(y)$. Это означает, что образ g в группе локальных когомологий $H^2_{B(y)}\left(L, \mathscr{E}nd\mathscr{E}^{(1)}_L(-2, 0)\right)$ отличен от нуля.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 2

По материалу первой части этой главы, относящейся к автодуальному случаю, есть целый ряд обзоров. Отметим среди них лекции М. Ф. Атьи [43], Р. Уэллса [112], [114], записки семинаров в Париже [58] и Берлине [101]. Полное изложение автодуальной геометрии не было целью книги, и многих важных тем мы не касались. Связи с преобразованием Радона можно проследить, ознакомившись со статьями [10], [12] и книгой [69].

Преобразование Радона — Пенроуза для векторных расслоений относительно диаграммы автодуальности было определено Уордом [108] в локальной по M ситуации. Близкий подход сформулирован в работе Белавина и Захарова [3]. Соответствие между инстантонами и локально-свободными пучками на P^3 описано в статье Атьи и Уорда [40]. Там же указан метод конструкции инстантонных пучков ранга 2 как расширений двух пучков ранга 1 (на языке физиков «анзатц Атьи — Уорда»). Для инстантонных пучков этот метод оказался не очень удобным из-за того, что отсутствует каноническое представление инстантонного пучка в виде расширения и, с другой стороны, по произвольному расширению трудно установить, будет ли оно инстантонным и какие два расширения изоморфны. Гораздо более удачным оказался метод монад, описанный в работе [42] и здесь в §§ 3 и 4. Этот метод дает вполне прозрачную конструкцию инстантонов, но в задаче описания модулей инстантонов приводит к проблеме исследования вещественного многообразия, заданного матричными уравнениями, относительно которого, кроме размерности, мало, что известно. Разные представления этих многообразий собраны в [14]. Его топологическая сложность продемонстрирована в статье Атьи и Джонса [44]. Интересно, что описание модулей упрощается, если перейти к стабильной постановке, т. е. позволить рангу группы расти вместе с инстантонным числом: ср. [59]. Известно, что предел $N \to \infty$ (N — ранг калибровочной группы) весьма популярен также в квантовой теории поля.

Конструкция Атьи — Уорда оказалась весьма полезной в задаче классификации автодуальных $SU(2)$-расслоений над $\mathbf{R}^4$ с другими граничными условиями — так называемых монополей ’т Хуфта — Полякова. Очень ясное описание их физических и математических свойств см. в книге [79]. Монопольный пучок определен на $P^3\backslash P^1$ и там представляется в виде расширения канонически: см. работы Хитчина [75], [76], которые завершают цикл исследований, включающий статьи Уорда [111], Корригэна и Годдарда [53] и Нама [87], [88]. Наму принадлежит замечательная идея — строить монопольные решения также с помощью монад, но бесконечного ранга. Пространства F_i в монаде Нама суть пространства функций на интервале, а граничные операторы — d-дифференциальные операторы первого порядка. Условие $d^2 = 0$ немедленно дает уравнения в форме Лакса типа уравнений Эйлера вращения твердого тела. Спектральная кривая Атьи — Уорда — Хитчина — Нама в монопольной задаче соответствует спектральной кривой в задаче «конечнозонного» интегрирования уравнений Эйлера. Эта давно обсуждаемая связь между задачами теории поля в четырехмерном пространстве-времени и вполне интегрируемыми одно- и двумерными системами, вероятно, впервые проявилась так четко. В несколько другом направлении на нее указывает работа [107].

Общее обсуждение автодуальной римановой геометрии дано в основополагающей работе Атьи, Хитчина и Зингера [40]. Роль автодуальных пространств Эйнштейна в будущей квантовой теории гравитации обсуждена Пенроузом [95]; см. также [11]. В работах Уорда [109], [110] и Хитчина [73], [74] построены конкретные классы таких пространств. Автодуальные пространства Эйнштейна возникают также в классической ОТО для островных систем, создающих асимптотически плоское пространство-время: см. [62] и [85].

Очень сильные и неожиданные результаты в топологии гладких четырехмерных многообразий были получены недавно Дональдсоном [57], который изучил пространство модулей для автодуальных расслоений над ее обязательно автодуальным компактным римановым многообразием. Он доказал, что если форма пересечения 2-циклов гладкого компактного односвязного ориентированного четырехмерного многообразия положительно определена, то она приводится над **Z** к сумме квадратов. Фундаментальная теорема существования, на которую опирается Дональдсон, была доказана Таубесом [105]; эта работа пользуется тонким нелинейным функциональным анализом.

Возвращаясь к инстантонам, отметим обзор [8], посвященный обсуждению их физических аспектов. Он подводит итоги активной работы, инициированной статьей [48], где были введены инстантоны. Наше изложение в §§ 3 и 4 основано на статьях [15], [16], [2]. Задача об инстантонах вызвала вспышку интереса к задаче классификации локально-свободных пучков на P^n в среде алгебраических геометров. Работа Барта [46] была решительным прорывом для $n = 2$. В статье Барта и Хулека [47] дан разбор техники монад, принадлежащей Хорроксу. В статьях [1] и [5] А. А. Бейлинсона и И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда, С. И. Гельфанда получена принципиально важная теорема о структуре производной категории когерентных пучков на P^n, представляющая собой далекое обобщение монадной техники. См. также вводный курс [90].

Среди работ, исследующих другие аспекты преобразования Радона — Пенроуза в автодуальном и плоском случаях, особенно задачу решения линейных (безмассовых) уравнений теории поля, отметим статью Хитчина [72], где описан общий когомологический механизм, и работы [12], [93], [60], [113]. В последней дана когомологическая интерпретация обобщенных решений.

Начала теории неавтодуального преобразования Радона — Пенроуза были заложены в работах Виттена [117] и Айзенберга, Ясскина и Грина [78], где содержится основное открытие: уравнения Янга — Миллса без источников для $(\mathcal{E}, \nabla)$ на плоском пространстве времени равносильны возможности продолжить $\mathcal{E}_L$ на $L^{(3)}$. В работе автора [20] к задаче продолжения была применена стандартная техника когомологий (см. [67] и весьма далекое обобщение в [77]) и было обнаружено, что учет препятствия к продолжению равносилен введению тока, порождающего поля Янга — Миллса. После этого систематический просмотр различных задач продолжения в работах [70],

[71], [22], [35], [36] позволил указать геометрическую переформулировку для целого ряда уравнений теории поля. §§ 6—10 этой главы основаны на указанных работах. Их результаты несколько обобщены, чтобы включить в рассмотрение также искривленное пространство-время. Значительную помощь автору здесь оказали работы Ле Брена [82] — [84] и усовершенствования Бухдаля [50], [51]. Доказательство результатов §§ 9 и 10, основанные на когомологиях Дольбо, можно найти в [22]. Трактовка функции Грина в § 11 на работе Хоанг Ле Миня [37], которая частично обобщает конструкцию Атьи [45].

В работе [21] описана некоторая интерпретация уравнений Эйнштейна в терминах L, воспроизведенная здесь.

По поводу общих аспектов преобразования Радона — Пенроуза см. [30], [52], [55], [91]. Об анализе на аналитических пространствах с нильпотентами см. [97], [66], [64].

Глава 3

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРАЛГЕБРУ

Эта глава содержит подготовительные сведения к следующей, в которой излагаются основные факты о супермногообразиях — пространствах, часть координатных функций на которых коммутирует, а другая часть антикоммутирует. В последние годы становится ясно, что весь аппарат коммутативной алгебры, теории групп Ли, алгебраической, аналитической и дифференциальной геометрии допускает систематическое введение антикоммутирующих (нечетных, фермионных) величин, которое значительно обогащает рассматриваемые структуры и приводит к их весьма нетривиальным вариантам в «суперматематике».

После изложения основных принципов супералгебры в § 1 мы обсуждаем с некоторыми подробностями тот алгебраический аппарат, который находит немедленное применение к супергеометрии. К нему относится тензорный формализм, который изложен в § 2, с учетом современной идеологии тензорных категорий. Матричному исчислению посвящен § 3, где введены основные понятия супердетерминанта и суперследа. В § 4 определены некоторые важные комплексы, включая комплекс де Рама, и дана гомологическая интерпретация супердетерминанта. Билинейные формы, скалярные произведения и особенности понятия вещественной структуры рассмотрены в §§ 5 и 6.

§ 1. Правило знаков

1. Общие принципы. Основные алгебраические структуры, имеющие хождение в геометрии,— это кольца (функций, дифференциальных операторов, дифференциальных форм, векторных полей), модули (пучки модулей) и гомоморфизмы между ними. Поэтому все основные законы композиции естественно делятся на мультипликативные и аддитивные. К первому классу относится сложение в кольцах и модулях, сложение морфизмов модулей; ко второму — умножение в кольцах, коммутирование векторных полей, композиция морфизмов, тензорное умножение элементов и морфизмов модулей.

Первая характерная особенность супералгебры состоит в том, что все аддитивные группы ее основных и производных структур $\mathbf{Z}_2$-градуированы, где $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{0, 1\}$. Наши обозначения для градуировки аддитивной группы таковы: $A = A_0 \oplus A_1$; если $a \in A_\varepsilon$ — однородный элемент степени ε, то $\tilde{a} = \varepsilon$. Элементы из A_0 называются четными, из A_1 — нечетными. Любой мультипликативный закон композиции совместим с градуировкой: $\widetilde{ab} = \tilde{a} + \tilde{b}$.

Вторая характерная особенность супералгебры состоит в том, что в определениях, аксиомах и производных от них полилинейных тождествах основных структур появляются дополнительные (по сравнению с обычной алгеброй) множители ±1. Общее эвристическое правило для вычисления этих множителей таково.

Если в какой-то формуле обычной алгебры появляется несколько мономов с переставленными членами, то в соответствующей формуле супералгебры каждая перестановка соседних членов, скажем, a и b, сопровождается добавлением к этому моному множителя $(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}$.

Довольно удивительный математический принцип, который выводится из наблюдений над тем, как работает это правило,— это его внутренняя согласованность: если корректно учитывать правило знаков в определениях, оно само появится в теоремах. Вероятно, не стоит превращать этот принцип в метатеорему, иначе есть опасность не заметить самые интересные ситуации, когда он неприменим. Пример такой ситуации — формула для супердетерминанта, в которой полилинейное тождество $\det A = \sum \operatorname{sgn}(s) a_{1s(1)} \ldots a_{ns(n)}$ заменяется в супералгебре выражением со знаменателем (см. § 3).

Цель этого параграфа — дать список определений и простых конструкций, в которых правило знаков работает без особых неожиданностей.

2. Кольца, коммутаторы и суперкоммутативность. Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированное кольцо. В аксиоме ассоциативности $a(bc) = (ab)c$ никаких перестановок множителей нет, и она сохраняется в супералгебре в прежнем виде. Суперкоммутатором пары элементов a, $b \in A$ называется элемент

$$[a, b] = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba.$$

В записях такого типа всегда подразумевается, что a, b однородны, а на неоднородные элементы определение распространяется по аддитивности. Знак $(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}$ несуществен в характеристике 2, и мы всегда предполагаем, что в наших кольцах элемент 2 обратим, а в модулях умножение на 2 является изоморфизмом.

Мы говорим, что a суперкоммутирует с b, если $[a, b]=0$. Два нечетных элемента суперкоммутируют, если $ab=-ba$. Суперцентр A есть $Z(A)=\{a\in A\,|\,\forall b\in A,\ [a, b]=0\}$. Гомоморфизм колец $f\colon A\to B$ определяет на B структуру A-алгебры, если $f(A)\subset Z(B)$. Все гомоморфизмы колец сохраняют градуировку.

Кольцо A суперкоммутативно, если $[a, b]=0$ для всех a, $b\in A$. Если $a\in A_1$, то $a^2=\frac{1}{2}[a, a]=0$: все нечетные элементы нильпотентны.

3. **Примеры.** а) Пусть $A=k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — алгебра Грассмана над полем k характеристики $\neq 2$, порожденная элементами с соотношениями $\xi_i^2=0$, $\xi_i\xi_j=-\xi_j\xi_i$ при $i\neq j$. Она имеет свободный базис из 2^n элементов $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots$ $\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i=0$ или 1. Мы полагаем $\tilde{\xi}_i=1$ и $\tilde{\xi^\alpha}=|\alpha| \bmod 2$, $|\alpha|=\sum\alpha_i$. Эта алгебра суперкоммутативна.

Более общо, можно рассматривать кольцо $A=k[x_1, \ldots, x_m;$ $\xi_1, \ldots, \xi_n]$, порожденное образующими с соотношениями $x_ix_j=x_jx_i$, $x_i\xi_j=\xi_jx_i$, $\xi_i\xi_j=-\xi_j\xi_i$. Это — кольцо алгебраических (полиномиальных) функций на аффинном суперпространстве размерности $m|n$ над полем k; его спектр (в смысле теории схем Гротендика, легко обобщающейся на суперслучай) есть афинная суперсхема. Разумеется, $\tilde{x}_i=0$.

Аналогично, можно расширить кольцо гладких функций в области $U\subset\mathbf{R}^m$ добавлением нечетных переменных и получить кольца $C^\infty(U^{m|n})=C^\infty(U)[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ или же расширить кольцо аналитических функций в области $V\subset\mathbf{C}^m$ и получить кольцо converseаналитических функций $\mathcal{O}(V)[\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n]$. Функции всех типов (алгебраические, аналитические, гладкие) полиномиальны по нечетным переменным.

б) Более общо, пусть B — коммутативное кольцо, S — некоторый B-модуль, $A=\Lambda_B(S)=\bigoplus_{i\geqslant 0}\Lambda_B^i(S)$ — его внешняя алгебра, $A_0=\bigoplus_{i\geqslant 0}\Lambda_B^{2i}(S)$, $A_1=\bigoplus_{i\geqslant 0}\Lambda_B^{2i+1}(S)$. Она суперкоммутативна. $\mathbf{Z}$-градуировка, имеющаяся на A, совместима с $\mathbf{Z}_2$-градуировкой в том смысле, что четность элемента определяется четностью его **Z**-степени. Вообще говоря, на кольцах, модулях, супералгебрах Ли и т. п. нет такой инвариантно определенной **Z**-степени, но когда она может быть однозначно определена, она оказывается весьма полезной. Пример — структурный пучок на проективном суперпространстве.

в) В произвольном ассоциативном кольце B суперкоммутатор удовлетворяет двум основным тождествам:

$$[a, b] = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}[b, a],$$

$$[a, [b, c]] + (-1)^{\tilde{a}(\tilde{b}+\tilde{c})}[b, [c, a]] + \\ + (-1)^{\tilde{c}(\tilde{a}+\tilde{b})}[c, [a, b]] = 0.$$

Читателю следует проверить их непосредственно, а также убедиться, что они получаются из обычных тождеств Якоби и антикоммутативности коммутатора формальным применением правила знаков. Стоит еще проверить, что если B является A-алгеброй, то коммутатор A-билинеен в следующем сысле ($a \in A$; b, $c \in B$):

$$a[b, c] = [ab, c] = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}[ba, c] = \\ = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}[b, ac] = (-1)^{\tilde{a}(\tilde{b}+\tilde{c})}[b, c]\,a.$$

Все эти тождества превращаются в супералгебре в аксиомы супералгебр Ли.

4. Модули. Аксиомы структур левого A-модуля, правого A-модуля и A-бимодуля в супералгебре совпадают с Z_2-градуированными версиями обычных аксиом: дополнительных перемен знаков нет.

Если кольцо A суперкоммутативно, то, как и в коммутативной алгебре, любой односторонний модуль канонически превращается в бимодуль. Точнее, назовем две структуры на S, левого и правого модуля над кольцом A, согласованными, если $as = (-1)^{\tilde{a}\tilde{s}}sa$ для $a \in A$, $s \in S$. Тогда:

а) По любой структуре левого A-модуля на S однозначно восстанавливается согласованная в ней структура правого A-модуля, и наоборот.

б) Модуль с согласованными структурами является бимодулем (проверьте, что $a(sb) = (as)b$).

Пользуясь этими рецептами, мы всегда можем свободно переходить от одной структуры к другой. Если $S = S_0 \oplus S_1$, то S_0 и S_1 являются A_0-подмодулями в S.

Аддитивное отображение A-модулей $f\colon S \to T$ называется четным (гомо)морфизмом, если оно сохраняет градуировку и A-линейно. При этом из $f(as) = af(s)$ следует, что $f(sb) = f(s)b$, и, наоборот, так что морфизм левых (правых) A-модулей автоматически является морфизмом бимодулей. Аддитивную группу таких морфизмов мы будем обозначать $\mathrm{Hom}_0\,(S,\ T)$.

Аддитивное отображение A-модулей $f\colon S \to T$ называется нечетным гомоморфизмом, если оно обращает градуировку $(\widetilde{f(s)} = \widetilde{s} + 1)$ и A-линейно в смысле правила знаков: $f(as) = (-1)^{\widetilde{a}} af(s)$, $f(sb) = f(s)b$. Снова любая из этих формул следует из другой. Аддитивную группу таких морфизмов мы обозначим $\mathrm{Hom}_1\,(S,\ T)$ и положим

$$\mathrm{Hom}\,(S,\ T) = \mathrm{Hom}_0\,(S,\ T) \oplus \mathrm{Hom}_1\,(S,\ T).$$

На $\mathrm{Hom}\,(S,\ T)$ можно ввести структуру A-модуля с помощью обычной формулы $(af)(s) = a(f(s))$. Легко проверить, что для согласованной структуры правого A-модуля имеем $f(a)(s) = (-1)^{\widetilde{f}\widetilde{a}}(af)(s) = f(as)$ и т. п.

С точки зрения обычной категорной алгебры следует считать $\mathrm{Hom}\,(S,\ T)$ внутренним функтором Hom. Другая точка зрения, более естественная в супералгебре, состоит в том, что все аддитивные категории в ней должны быть снабжены суперструктурой: Hom'ы $\mathbf{Z}_2$-градуированы, и знаки появляются в определении инверсной категории, функторов и т. п. Тогда $\mathrm{Hom}\,(S,\ T)$ есть правильное определение группы морфизмов модулей, даже для односторонних модулей.

5. Функтор смены четности. Пусть S — левый или правый A-модуль. Определим модуль ΠS условиями: а) $(\Pi S)_0 = S_1$, $(\Pi S)_1 = S_0$; б) сложение в ΠS то же, что в S; правое умножение на A то же, что в S; левое отличается знаком: $a\,(\Pi s) = (-1)^{\widetilde{a}}\,\Pi\,(as)$, где Πs — элемент ΠS, отвечающий $s \in S$. Мнемоническое правило: рассматривать Π как формальный множитель степени 1. Аналогично можно определить $S\Pi$ — с сохранением левого умножения.

Если A суперкоммутативно, то этот рецепт переводит согласованные структуры на S в согласованные на ΠS. Поставим в соответствие морфизму $f\colon S \to T$ морфизм $f^{\Pi}\colon \Pi S \to \Pi T$, теоретико-множественно совпадающий с f. Легко видеть, что это превращает сопоставление $S \mapsto \Pi S$ в функтор, $\Pi^2 = \mathrm{id}$.

Кроме того, по морфизму $f\colon S \to T$ можно построить морфизмы $\Pi f\colon S \to \Pi T$, $(\Pi f)(s) = \Pi(f(s))$, и $f\Pi\colon \Pi S \to T$, $(f\Pi)(\Pi s) = f(s)$. Очевидно, $f\Pi = \Pi f \Pi$. Имеются отождествления

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Pi S, T) & \mathrm{Hom}(S, T) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(S, \Pi T) \\
f\Pi \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & f \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \Pi f, \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}$$

которые сами являются нечетными изоморфизмами A-модулей.

6. Свободные A-модули. В любой из трех категорий A-модулей имеется само кольцо A с левым, правым или двусторонним умножением. Свободным A-модулем ранга $p|q$ называется A-модуль, изоморфный $A^{p|q} = A^p \oplus (\Pi A)^q$. Он имеет свободную систему образующих, из которых p четны и q нечетны.

Если A суперкоммутативно, то ранг определен однозначно в том смысле, что свободные модули разных (конечных) рангов неизоморфны. Это доказывается так же, как в коммутативном случае: редукция кольца по модулю максимального идеала сводит задачу к инвариантности размерности четной и нечетной компонент векторного пространства над полем.

Читатель обратит внимание на то, что разложение $A^{p|q}$ на «четно порожденную» часть $A^{p|0}$ и «нечетно порожденную часть» $A^{0|q}$ вообще говоря, определено неинвариантно и не совпадает с разложением на четную и нечетную части $[A_0^p \oplus (\Pi A_1)^q] \oplus [A_1^p \oplus (\Pi A_0)^q]$. Лишь при $A_1 = \{0\}$ эти разложения одинаковы.

7. Матрицы в линейной супералгебре. Элемент левого A-модуля $A^{p|q}$ мы будем записывать строкой его координат, элемент правого — столбцом. В случае бимодуля с согласованными структурами левого и правого умножения переход от строки левых координат к столбцу правых не есть простое транспонирование: $e = \sum\limits_{i=1}^{p+q} a_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{p+q} (-1)^{\tilde{a}_i \tilde{e}_i} e_i a_i$. Чтобы правильно написать знаки, нужно знать четность e_i, или «четность позиции i», а также четность $\tilde{a}_i$, которая определяется по четности e и четности позиции: $\tilde{a}_i = \tilde{e} + \tilde{e}_i$.

Аналогично, морфизмы между свободными A-модулями можно задавать матрицами, действующими слева или справа на столбцы или строки координат, но при этом позиция каждого элемента должна быть снабжена указанием четности строки и столбца. Дадим формальное определение.

Матричный формат — это два конечных множества, разбитых на пары непересекающихся подмножеств четных и нечетных элементов: $I = I_0 \cup I_1$, $J = J_0 \cup J_1$. Матрица данного формата со значениями в кольце A есть функция $a\colon I \times J \to A$; ее значения $a(i, j) = a_{ij}$ суть элементы матрицы. Четность позиции (ij) в данном матричном формате есть $\tilde{i} + \tilde{j}$. Матрица данного формата называется четной, если $\tilde{a}_{ij} = \tilde{i} + \tilde{j}$ для всех i, j, нечетной, если $\tilde{a}_{ij} = \tilde{i} + \tilde{j} + 1$ для всех i, j.

Стандартный матричный формат — это $I_0 = (1, \ldots, m)$, $I_1 = (m+1, \ldots, m+n)$; $J_0 = (1, \ldots, p)$, $J_1 = (p+1, \ldots, p+q)$. (Если $m = 0$, то $I_0 = \varnothing$ и т. п.). Матрица стандартного формата разбита на четыре блока

$$B = \begin{array}{|c|c|c} \hline B_1 & B_2 & m \\ \hline B_3 & B_4 & n \\ \hline p & q & \end{array}$$

она четная (соответственно нечетная), если B_1, B_4 заполнены четными (соответственно нечетными), а B_2, B_3 — нечетными (соответственно четными) элементами кольца.

Множество матриц стандартного формата с элементами из кольца A обозначается $M(m|n;\ p|q;\ A)$. Оно образует $\mathbf{Z}_2$-градуированный модуль, естественно изоморфный $\operatorname{Hom}(A^{p|q}, A^{m|n})$ с обычным матричным умножением. (Если не оговорено обратное, матрица действует слева на столбец левых координат при таком отображении.) Умножение морфизмов отвечает умножению матриц

$$M(m|n;\ p|q;\ A) \times M(p|q;\ r|s;\ A) \to M(m|n;\ r|s;\ A).$$

Заметим, что естественное вложение A в $M(m|n;\ m|n;\ A) = \operatorname{End}(A^{m|n})$ выглядит не вполне обычно: оно определено, если A суперкоммутативно, и имеет вид $a \mapsto$ (умножение на a слева), так что его матрица равна $a_{ij} = \delta_{ij}(-1)^{\tilde{a}\tilde{i}}a$.

Дальнейшие сведения о матричном исчислении см. в § 3.

8. Дифференцирования и супералгебры Ли. Пусть A — некоторое кольцо. Аддитивное однородное отображение $X\colon A \to A$ называется левым (супер)дифференцированием, если выполнено тождество Лейбница

$$X(ab) = (Xa)b + (-1)^{\tilde a \tilde X} a(Xb) \text{ для всех } a, b \in A.$$

Если A — B-алгебра, X называется дифференцированием над B, если $Xb = 0$ для всех $b \in B$. Полагая $[X, Y] = XY - (-1)^{\tilde X \tilde Y} YX$ в кольце аддитивных отображений, получаем, что дифференцирования A над B образуют супералгебру Ли в смысле п. 3, в).

Если A суперкоммутативно, эта супералгебра Ли является A-модулем с левым умножением $(aX)(b) = a(Xb)$.

Пусть A суперкоммутативно и M — некоторый A-модуль. Аддитивное отображение $X\colon A \to M$ называется дифференцированием со значением в M, если

$$X(ab) = (Xa)b + (-1)^{\tilde a \tilde X} a(Xb) \text{ для всех } a, b \in A.$$

Каждому такому дифференцированию отвечает морфизм A в кольцо $A \oplus M$ (для четного X) или $A \oplus \Pi M$ (для нечетного X) с законом умножения $(a, m)(a', m') = (aa', ma' + am')$ (дальше мы пишем $a + m$ вместо (a, m)):

$$a \mapsto a + Xa \qquad (\tilde X = 0);$$
$$a \mapsto a + \Pi X\, a \, (\tilde X = 1).$$

Смысл формулы Лейбница и состоит в том, что это отображение совместимо с кольцевым умножением. В самом деле, в нечетном случае имеем

$$[a + \Pi Xa][b + \Pi Xb] = ab + (\Pi Xa)b + a(\Pi Xb) =$$
$$= ab + \Pi\left[Xa\cdot b + (-1)^{\tilde a} aX\cdot b\right] = ab + \Pi\big(X(ab)\big).$$

Как в коммутативном случае, имеются универсальные дифференцирования, абсолютные и в классе B-алгебр:

четное: $d_{\mathrm{ev}}\colon A \to \Omega^1_{\mathrm{ev}} A$ (соответственно $\Omega^1_{\mathrm{ev}} A/B$),

нечетное: $d_{\mathrm{odd}}\colon A \to \Omega^1_{\mathrm{odd}} A$ (соответственно $\Omega^1_{\mathrm{odd}} A/B$).

Они связаны естественным изоморфизмом $\Omega^1_{\mathrm{odd}} A = \Pi \Omega^1_{\mathrm{ev}} A$, который отвечает отождествлению $d_1 = \Pi d_0$.

Мы вернемся к модулям дифференциалов в § 4.

§ 2. Тензорная алгебра над суперкоммутативным кольцом

1. Тензорное произведение. Пусть A — суперкоммутативное кольцо, S и T — два A-модуля. Их тензорное произведение $S \underset{A}{\otimes} T$ определяется стандартно, с использованием структуры правого A-модуля на S и левого — на T (т. е. $sa \otimes t = s \otimes at$) и градуировки $(S \otimes T)_k = \bigoplus\limits_{i+j=k} S_i \otimes T_j$. Это произведение само является A-модулем относительно согласованных умножений слева и справа:

$$a(s\otimes t) = as\otimes t = (-1)^{\tilde{a}(\tilde{s}+\tilde{t})}(s\otimes t)a = (-1)^{\tilde{a}(\tilde{s}+\tilde{t})}s\otimes ta.$$

Возможность обращаться с тензорным произведением над суперкоммутативными кольцами так же свободно, как и в коммутативном случае, обеспечивается введением дополнительных знаков в определение стандартных изоморфизмов тензорной алгебры, из которых важнейшим является морфизм коммутативности (commutativity constraint):

$$\psi_{S,T} : S \otimes T \xrightarrow{\sim} T \otimes S,$$

$$\psi_{S,T}(s \otimes t) = (-1)^{\tilde{s}\tilde{t}}\, t \otimes s.$$

Набор $(\psi_{S,T})$ следует рассматривать как морфизм функторов.

2. Категория A-модулей как тензорная категория. Структура тензорной категории модулей над суперкоммутативным кольцом A определяется следующими данными.

а) Морфизм ассоциативности (associativity constraint), т. е. набор стандартных функториальных изоморфизмов

$$\varphi_{R,S,T} : R \otimes (S \otimes T) \xrightarrow{\sim} (R \otimes S) \otimes T,$$

$$\varphi_{R,S,T}[r \otimes (s \otimes t)] = (r \otimes s) \otimes t.$$

Он удовлетворяет аксиоме пятиугольника, которая означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
R \otimes (S \otimes (T \otimes U)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1\otimes\varphi"] & (R \otimes S) \otimes (T \otimes U) \arrow[r, "\varphi"] & ((R \otimes S) \otimes T) \otimes U \\
R \otimes ((S \otimes T) \otimes U) \arrow[rr, "\varphi"] & & (R \otimes (S \otimes T)) \otimes U. \arrow[u, "\varphi\otimes 1"]
\end{tikzcd}$$

б) Морфизм коммутативности ψ, описанный выше, который совместим с морфизмом ассоциативности в том смысле, что диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
R \otimes (S \otimes T) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1\otimes\psi"] & (R \otimes S) \otimes T \arrow[r, "\psi"] & T \otimes (R \otimes S) \arrow[d, "\varphi"] \\
R \otimes (T \otimes S) \arrow[r, "\varphi"] & (R \otimes T) \otimes S \arrow[r, "\psi\oplus 1"] & (T \otimes R) \otimes S
\end{tikzcd}$$

коммутативны.

в) Единичный объект, т. е. пара, состоящая из модуля U и изоморфизма u: $U \to U \otimes U$ такого, что отображение $S \to U \otimes S$ есть эквивалентность категорий. Можно положить $U = A$, $u(1) = 1 \otimes 1$. Все единичные объекты канонически изоморфны.

3. Тензорное произведение семейства модулей. Пусть I — конечное множество, $(S_i | i \in I)$ — семейство модулей, пронумерованное I. Тогда можно определить модуль $\bigotimes\limits_{i\in I} S_i$ как объект категории, определенный не однозначно, а несколькими разными реализациями, между которыми заданы канонические изоморфизмы. Каждая реализация определяется: а) упорядочением I; б) расстановкой скобок между элементами I, которая отвечает реализации тензорного произведения как итерации попарных произведений. Изоморфизм между двумя реализациями собирается из композиции изоморфизмов φ и ψ. Аксиомы п. 2, а) и б) обеспечивают независимость от произволов выбора.

Точная формулировка этих утверждений такова. Для каждого конечного множества I можно определить функтор $\bigotimes\limits_{I}$: $\mathcal{M}od^I \to \mathcal{M}od$ (где $\mathcal{M}od$ — категория A-модулей) и для каждого отображения конечных множеств a: $I \to J$ можно определить изоморфизм функторов

$$\otimes(a): \bigotimes_{i\in I} S_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j\in J}\Bigl(\bigotimes_{a(i)=j} S_i\Bigr)$$

со следующими свойствами.

Для одноэлементных множеств $\bigotimes\limits_{I}$ есть тождественный функтор; для отображения a между одноэлементными множествами $\otimes(a)$ есть тождественный изоморфизм. Для $I = \{1, 2\} = J$, a — перестановка, $\otimes(a)$ индуцирован морфизмом коммутативности (на любой реализации). Аналогично для $I = \{1, 2, 3\}$ и морфизма «расстановки скобок».

4. Действие симметрической группы. Для $I = \{1, \ldots, n\}$ будем писать $T^{\otimes n}$ вместо $\bigotimes\limits_{I} T$. Согласно предыдущему каждая перестановка a: $I \to I$ определяет автоморфизм $\otimes(a)$:

$T^{\otimes n} \to T^{\otimes n}$. Он является представлением симметрической группы S_n на $T^{\otimes n}$, которое можно использовать для проведения обычных конструкций, связанных с симметризаторами Шура.

5. Симметрическая алгебра. A-модуль $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} T^{\otimes n} = A\langle T\rangle$, где $T^0 = A$, является $\mathbf{Z}$-градуированным объектом в категории ассоциативных супералгебр с обычным умножением $T^{\otimes m} \times T^{\otimes n} \to T^{\otimes(m+n)}$. Отображение $T \to A\langle T\rangle$ является универсальным для отображений T в ассоциативные A-алгебры (A-алгебра B есть морфизм супералгебр $A \to B$ такой, что образ A лежит в суперцентре B, т. е. суперкоммутирует со всеми элементами B).

Обозначим через J_S идеал в $A\langle T\rangle$, порожденный всеми суперкоммутаторами. Можно показать, что он порожден суперкоммутаторами $t_1 \otimes t_2 - (-1)^{\tilde{t}_1\tilde{t}_2} t_2 \otimes t_1 \in T^{\otimes 2}$, $t_i \in T$. Назовем симметрической алгеброй A-модуля T факторкольцо $S_A(T) = A[T] = A\langle T\rangle/J_S$. Отображение $T \to S_A(T)$ является универсальным для отображений T в суперкоммутативные A-алгебры. Если A является Q-алгеброй, то проекторы симметризации $\frac{1}{n!}\sum\limits_{a\in S_n} \otimes(a) : T^{\otimes n} \to T^{\otimes n}$ позволяют выделить $S_A(T)$ прямым слагаемым из $A\langle T\rangle$ как совокупность вполне симметричных тензоров.

Наличие $\mathbf{Z}_2$-градуировки ведет к своеобразному смешению симметрии с антисимметрией, поскольку коммутатор нечетных элементов является с наивной точки зрения антикоммутатором. Поэтому для нечетно порожденного A-модуля $T = A^{0|q}$ его симметричная алгебра является грассмановой.

6. Внешняя алгебра. Есть два варианта определения внешней алгебры. Пусть J_Λ — идеал в $A\langle T\rangle$, порожденный (супер)антикоммутаторами $t_1 \otimes t_2 + (-1)^{\tilde{t}_1\tilde{t}_2} t_2 \otimes t_1 \in T^{\otimes 2}$, и, как в обычной алгебре,

$$\Lambda_A(T) = A\langle T\rangle/J_\Lambda.$$

Другой вариант состоит в принятии определения Бернштейна — Лейтеса:

$$E_A(T) = S_A(\Pi T).$$

Правила коммутирования двух элементов t_1, $t_2 \in T$ в $\Lambda_A(T)$

и в $E_A(T)$ отличаются знаком, если и только если t_1 и t_2 имеют разную четность.

Точнее говоря,

$$t_1 t_2 = -(-1)^{\tilde{t}_1 \tilde{t}_2} t_2 t_1 \text{ в } \Lambda_A(T),$$

$$\Pi t_1 \Pi t_2 = (-1)^{\widetilde{\Pi t_1}\widetilde{\Pi t_2}} \Pi t_2 \Pi t_1 =$$

$$= (-1)^{\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + 1} (-1)^{\tilde{t}_1 \tilde{t}_2} \Pi t_2 \Pi t_1 \text{ в } S_A(\Pi T),$$

поскольку $\widetilde{\Pi t} = \tilde{t} + 1$. Поэтому, как A-модули, $\Lambda_A^n(T)$ и $S_A^n(\Pi T)$ изоморфны.

Как A-алгебры, $\Lambda_A(T)$ и $E_A(T)$, разумеется, неизоморфны: вторая суперкоммутативна, а первая нет.

7. Супераддитивные категории. Функториальные свойства тензорного умножения удобно формулировать, пользуясь следующими категорными понятиями.

Супераддитивная категория C — это аддитивная категория, у которой группы морфизмов снабжены $\mathbf{Z}_2$-градуировкой, совместимой с композицией морфизмов. Функторы между супераддитивными категориями — это обычные функторы, которые на морфизмах являются четными отображениями.

Пусть C — супераддитивная категория. Тогда C^+ определяется как категория с теми же объектами и морфизмами, что и C, но с измененной композицией стрелок: $g \circ f$ (композиция в C^t) $= (-1)^{\tilde{g}\tilde{f}} gf$ (композиция в C). Как обычно, C^0 означает C с обращенными стрелками. Там, где в обычной алгебре появляется категория C^0 (скажем, в определении контравариантных функторов) в суперaлгебре обычно появляется C^{0t}.

В определении произведения супераддитивных категорий также появляются знаки:

$$\mathrm{Ob}\,(C \times D) = \mathrm{Ob}\,C \times \mathrm{Ob}\,D,$$

$$\mathrm{Hom}_{C \otimes D}(\langle S_0, T_0\rangle, \langle S_1, T_1\rangle) = \mathrm{Hom}_C(S_0, S_1) \times \mathrm{Hom}_D(T_0, T_1),$$

$$\langle f_0, g_0\rangle \langle f_1, g_1\rangle = (-1)^{\tilde{g}_0 \tilde{f}_1} \langle f_0 f_1, g_0 g_1\rangle.$$

Читателю предоставляется проверка того, что функтор ассоциативности произведения $(C \times D) \times E \to C \times (D \times E)$

$$\langle\langle S_0, S_1\rangle, S_2\rangle \mapsto \langle S_0, \langle S_1, S_2\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle f, g\rangle, h\rangle \mapsto \langle f, \langle g, h\rangle\rangle$$

действительно сохраняет композицию морфизмов.

8. Бифунктор гомоморфизмов. Пусть теперь C_A — супераддитивная категория модулей над суперкоммутативным кольцом A. Определим функтор

$$\mathcal{H}om\colon C_A^{0t}\times C_A\to C_A$$

следующими правилами:

объекты: $\mathcal{H}om(\langle S,\ T\rangle)=\operatorname{Hom}(S,\ T)$ как A-модуль;

$$\text{морфизмы: } \mathcal{H}om(\langle S_0,\ T_0\rangle \xrightarrow{\langle f^0, g\rangle} \langle S_1;\ T_1\rangle)=$$

$$\begin{array}{ccc} =\operatorname{Hom}(S_0,\ T_0) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(S_1,\ T_1), \\ \Cup & & \Cup \\ h & \longmapsto & ghf \end{array}$$

где тройное произведение морфизмов отвечает диаграмме $S_1\xrightarrow{f}S_0\xrightarrow{h}T_0\xrightarrow{g}T_1$. Чтобы убедиться в корректности этих определений, следует произвести довольно большое количество проверок с учетом правил знаков.

9. Полилинейные отображения и тензорные произведения. Пусть $S_1,\ \ldots,\ S_m,\ T$ — модули над суперкоммутативным кольцом A. В качестве временного определения для $0\leqslant i\leqslant\leqslant n$ назовем однородное полиаддитивное отображение $b\colon\ S_1\times\ldots\times S_m\to T$ i-полилинейным и будем записывать его значения в виде $s_1\ldots s_ibs_{i+1}\ldots s_m$, если выполняются следующие условия: при $j\leqslant i$, $a\in A$: $s_1\ldots as_j\ldots bs_{i+1}\ldots\ldots s_m=(-1)^{\tilde a(\tilde s_1+\ldots+\tilde s_{j-1})}a(s_1\ \ldots\ s_ibs_{i+1}\ \ldots s_m)$; при $j>i$: $s_1\ldots s_ib\ldots as_j\ldots s_m=(-1)^{\tilde a(\tilde b+\tilde s_1+\ldots+\tilde s_{j-1})}a(s_1\ldots s_i\,b\,s_{i+1}\ldots\ldots s_m)$. Обозначим через $L_i(S_1,\ \ldots,\ S_m;\ T)$ множество всех i-полилинейных отображений. Введем на нем структуру A-модуля с очевидной суммой и таким умножением, что $\ldots s_i(ab)s_{i+1}\ldots=\ldots(s_ia)bs_{i+1}\ldots$

Имеют место следующие факты, точную формулировку и доказательство которых мы оставляем читателю:

а) Правило знаков позволяет определить канонические изоморфизмы $L_i(S_1,\ \ldots,\ S_m;\ T)\to L_j(S_1,\ \ldots,\ S_m;\ T)$, согласованные между собой, так что можно ввести общий объект $L(S_1,\ \ldots,\ S_m;\ T)$ — модуль полилинейных отображений.

б) Имеется каноническое отождествление $L(S_1,\ \ldots\ \ldots,\ S_m;\ T)=\operatorname{Hom}(S_1\otimes\ldots\otimes S_m;\ T)$.

в) $L(S_1,\ \ldots,\ S_m;\ T)$ доопределяется до функтора $C_A^{0t}\times\ldots\ldots\times C_A^{0t}\to C$.

В § 5 мы подробнее изучим билинейные отображения.

10. Об индексном формализме в тензорной алгебре. Так же, как в обычной тензорной алгебре, удобно пользоваться для обозначения элементов тензорной алгебры модуля разложениями по тензорным базисам и многоиндексными обозначениями. При этом следует, однако, учитывать следующие обстоятельства.

а) Тензорная алгебра модуля T порождена не только T («нижние индексы») и T^* («верхние индексы»), но также ΠT и, возможно, $\overline{T}$ — «соседями T» в супералгебре (см. § 6 ниже). Для всех них нужны дополнительные типы индексов. Также иногда удобно различать индексы, относящиеся к четным и нечетным образующим,— по традиции, для этого используются малые латинские и греческие буквы соответственно.

б) Некоторые важнейшие конструкции перестают быть полилинейными: аналог «максимальной внешней степени модуля T» является лишь подфактором в тензорной алгебре (см. § 4 ниже).

§ 3. Суперслед и супердетерминант

Мы продолжаем считать A суперкоммутативным кольцом, в котором 2 обратима.

1. Супертранспонирование. Пусть матрица B стандартного формата описывает (четный или нечетный) морфизм b: $S \to T$ свободных A-модулей. Существует единственный морфизм b^*: $T^* \to S^*$ со свойством

$$(b^*(t^*),\ s) = (-1)^{\tilde{b}\tilde{t}}\ (t^*,\ b(s)) \quad \text{для всех } t^* \in T^*,\ s \in S,$$

где скобки означают каноническое спаривание. Через B^{st} обозначается матрица b^* в таких базисах T^* и S^*, которые двойственны слева базисам S и T, использованным для записи B. Формулы для B^{st} таковы:

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{st}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_1^{\mathrm{t}} & B_3^{\mathrm{t}} \\ -B_2^{\mathrm{t}} & B_4^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} & \text{при} \quad \tilde{B} = 0, \\[2ex] \begin{pmatrix} B_1^{\mathrm{t}} & -B_3^{\mathrm{t}} \\ B_2^{\mathrm{t}} & B_4^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} & \text{при} \quad \tilde{B} = 1. \end{cases}$$

Здесь t — обычное транспонирование.

Некоторые свойства операции супертранспонирования st таковы:

а) $(B+C)^{\mathrm{st}} = B^{\mathrm{st}} + C^{\mathrm{st}}$.

б) $(BC)^{\mathrm{st}} = (-1)^{\tilde{B}\tilde{C}} C^{\mathrm{st}} B^{\mathrm{st}}$.

в) $(\mathrm{st})^4 = \mathrm{id}$, $(\mathrm{st})^2 \neq \mathrm{id}$.

г) Если B — строка левых координат (стандартного формата), то B^{st} — столбец правых координат однородного вектора в том же базисе.

2. П-транспонирование. В тех же предположениях пусть b^{Π}: $\Pi S \to \Pi T$ — морфизм, теоретико-множественно совпадающий с b; B^{Π} — его матрица стандартного формата, записанная в тех же базисах, в которых весь блок четных (старых нечетных) элементов поставлен перед блоком нечетных (старых четных). Тогда

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^{\Pi} = \begin{pmatrix} B_4 & B_3 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Некоторые свойства П-транспонирования:

а) $(B+C)^{\Pi} = B^{\Pi} + C^{\Pi}$.

б) $(BC)^{\Pi} = B^{\Pi} C^{\Pi}$.

в) $\Pi^2 = \mathrm{id}$; $\Pi \circ \mathrm{st} \circ \Pi = (\mathrm{st})^3$.

3. Суперслед. На $S^* \otimes S$ определен линейный функционал свертки: $\sum s_i^* \otimes s_i \mapsto \sum (s_i^*, s_i)$. С другой стороны, $S^* \otimes S$ отождествляется с $\mathrm{End}\, S = \mathrm{Hom}\,(S, S)$: $\left(\sum s_*^i \otimes s_i\right)(t) = \sum (-1)^{\tilde{s}_i \tilde{t}} (s_i^*, t)\, s_i$. Записывая элементы $\mathrm{End}\, S$ матрицами стандартного формата, получим на них выражение свертки в виде функционала суперследа:

$$\mathrm{str}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathrm{tr}\, B_1 - \mathrm{tr}\, B_4 & \text{при} \quad \tilde{B} = 0; \\ \mathrm{tr}\, B_1 + \mathrm{tr}\, B_4 & \text{при} \quad \tilde{B} = 1. \end{cases}$$

Некоторые свойства суперследа:

а) str: $\mathrm{End}\, S \to A$ — морфизм A-модулей.

б) $\mathrm{str}\,[B, C] = 0$ для любых матриц такого формата, что BC, CB и $[B, C]$ определены. В частности, $\mathrm{str}\,(CBC^{-1}) = \mathrm{str}\, B$.

в) $\mathrm{str}\,(B^{\mathrm{st}}) = \mathrm{str}\, B$, $\mathrm{str}\,(B^{\Pi}) = -(-1)^{\tilde{B}}\, \mathrm{str}\, B$.

Фундаментальное отличие суперследа от обычного следа видно на формуле $\mathrm{str}\,(\mathrm{id}_{p|q}) = p - q$, где $\mathrm{id}_{p|q}$ — тождественное отображение $A^{p|q}$.

4. Березиниан, или супердетерминант. Пусть $B = \mathrm{GL}(p|q;\ A)$ (обратимые четные автоморфизмы $A^{p|q}$). Записывая B в стандартном формате, положим

$$\operatorname{Ber}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \det\left(B_1 - B_2B_4^{-1}B_3\right)\det B_4^{-1}.$$

Правая часть корректно определена, ибо $B_1 \in \mathrm{GL}(p|0;\ A_0)$, $B_4 \in \mathrm{GL}(q|0;\ A_0)$. Она принадлежит A_0 и обратима, т. е. лежит в $\mathrm{GL}(1|0;\ A_0)$.

5. Теорема. $\mathrm{Ber}\colon \mathrm{GL}(p|q;\ A) \to \mathrm{GL}(1|0;\ A_0)$ *есть гомоморфизм групп, совпадающий с детерминантом при* $q = 0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\operatorname{Ber} BC = \operatorname{Ber} B \cdot \operatorname{Ber} C$ для всех $B,\ C \in \mathrm{GL}(p|q;\ A)$. Положим

$$G = \{C \in \mathrm{GL}(p|q;\ A) \mid \forall B \in \mathrm{GL},\ \operatorname{Ber}(BC) = \operatorname{Ber} B \cdot \operatorname{Ber} C\}.$$

Следующие утверждения устанавливаются без труда и вместе доказывают теорему:

а) G — группа.

б) G содержит матрицы следующего вида (в стандартном формате):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_3 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & C_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где 1 — единичная матрица, а C_2 элементарна, т. е. имеет лишь один ненулевой элемент.

в) Матрицы, перечисленные в предыдущем пункте, порождают $\mathrm{GL}(p|q;\ A)$. Это следует из тождества

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & C_2C_4^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 - C_2C_4^{-1}C_3 & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_4^{-1}C_3 & 1 \end{pmatrix} = C_+C_0C_-$$

и последующего разложения первой матрицы справа в произведение:

$$\begin{pmatrix} 1 & C + C' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & C' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В проверке утверждения б) только заключение о том, что $C = \begin{pmatrix} 1 & C_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ для элементарной матрицы C_2 требует несколько большего, чем прямое вычисление по формуле, определяющей березиниан. Мы хотим установить, что

$\operatorname{Ber} BC = \operatorname{Ber} B \cdot \operatorname{Ber} C$ для всех B. Представим B в виде $B_+B_0B_-$, как в утверждении в). Прямое вычисление показывает, что умножение на B_+ и B_0 слева мультипликативно относительно Ber, так что достаточно считать $B = B_-$, т. е. проверить тождество $\operatorname{Ber}(B_-C_+) = 1$, где C_2 элементарна. Опуская блочные индексы, имеем

$$B_-C_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C \\ B & 1+BC \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Ber}(B_-C_+) = \det\left(1 - C(1+BC)^{-1} B\right) \det^{-1}(1+BC).$$

Единственный ненулевой элемент c матрицы C лежит в A_1, так что $c^2 = 0$. Поэтому произведение любых двух элементов матриц BC и $C(1+BC)^{-1}B$ (в коммутативном кольце A_0) равно нулю. Для матриц D с таким свойством имеем $(1+D)^{-1} = 1 - D$ и $\det(1+D) = tr\, D + 1$: в обычном разложении определителя лишь диагональное произведение не равно нулю. Следовательно,

$$\operatorname{Ber}(B_-C_+) = \det(1 - CB)\det^{-1}(1+BC) =$$
$$= 1 - \operatorname{tr} CB - \operatorname{tr} BC = 1,$$

что завершает доказательство. ■

6. Свойства березиниана. а) Если S — свободный A-модуль конечного ранга, $b \in \mathrm{GL}(S)$, положим $\operatorname{Ber} b = \operatorname{Ber} B$, где B — любая матрица стандартного формата, представляющая b. Это определение не зависит от выбора базиса A.

б) $\operatorname{Ber}(B^{st}) = \operatorname{Ber} B$; поэтому $\operatorname{Ber} b^* = \operatorname{Ber} b$.

в) $\operatorname{Ber}(B^{\Pi}) = (\operatorname{Ber} B)^{-1}$ и $\operatorname{Ber}(b^{\Pi}) = (\operatorname{Ber} b)^{-1}$. В самом деле, если $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, то

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B_3B_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 - B_3B_1^{-1}B_2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\operatorname{Ber} B = \det B_1 \cdot \det\left(B_4 - B_3B_1^{-1}B_2\right)^{-1}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Ber} \mathrm{B}^{\Pi} = \det\left(B_4 - B_3B_1^{-1}B_2\right) \det B_1^{-1} = (\operatorname{Ber} B)^{-1}.$$

г) $\operatorname{Ber}(b \oplus c) = \operatorname{Ber} b \cdot \operatorname{Ber} c$, где b, c — четные автоморфизмы S и T, а $b \oplus c$ — четный автоморфизм $S \oplus T$.

д) $\operatorname{Ber} e^{Bt} = e^{(\operatorname{str} B)t}$ в кольце формальных рядов от четной переменной t над A.

7. Березиниан свободного A-модуля. Пусть S — свободный A-модуль ранга $p|q$. Определим свободный A-модуль $\mathrm{Ber}\, S$ ранга $1|0$ (если q четное) или $0|1$ (если q нечетное), функторальный относительно четных изоморфизмов A-модулей и совпадающий с $\Lambda^p S$ при $q=0$.

Именно, $\mathrm{Ber}\, S$ определяется вместе с выделенным классом базисов: любому стандартно упорядоченному базису (s_i) модуля S отвечает базис (один элемент) $D(s_i) \in \mathrm{Ber}\, S$, с соотношениями: если $(s'_i) = (s_i) B$, то $D(s'_i) = D(s_i) \,\mathrm{Ber}\, B$.

Правило функториальности: четному изоморфизму b: $S \to S'$ отвечает изоморфизм $\mathrm{Ber}\, b$: $\mathrm{Ber}\, S \to \mathrm{Ber}\, S'$, который переводит $D(s_i)$ в $D(b(s_i))$. Если $S = S'$, то $\mathrm{Ber}\, b$ естественно отождествляется с умножением на элемент A_0, который обозначается $\mathrm{Ber}\, b$ в предыдущем пункте.

Иногда удобно пользоваться также элементами $D(s_i)$ для нестандартно упорядоченных базисов (s_i), положив $D(s_i) = (-1)^{\widetilde{\sigma}} D(s_{\sigma(i)})$, где σ — какая-нибудь перестановка, делающая упорядочение стандартным, а $(-1)^{\widetilde{\sigma}}$ — ее четность. Другой выбор такой перестановки τ приводит к тому же ответу, ибо $\sigma\tau^{-1}$ есть перестановка отдельно четных и отдельно нечетных мест в стандартном формате, при которой $D(\cdot)$ умножается на ее знак в силу формулы для березиниана.

Аналогичное правило позволяет доопределить березиниан четной матрицы квадратного формата с нестандартной нумерацией строк и (или) столбцов.

§ 4. Некоторые комплексы в супералгебре

1. Комплекс как $A[\xi]$-модуль. В обычной коммутативной алгебре комплекс A-модулей (S^i, d^i) можно рассматривать как $\mathbf{Z}$-градуированный модуль над суперкоммутативным кольцом $A[\xi]$ с одной нечетной образующей ξ: $S = \bigoplus\limits_i S^i$, d^i — левое умножение на ξ в S^i. Аналогично, бикомплекс есть $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$-градуированный модуль над $A[\xi_1, \xi_2] = S_A(A\xi_1 \oplus A\xi_2)$; $\mathbf{Z}_2$-степень следует определить тогда как редукцию полной степени $\mathrm{mod}\, 2$ (или противоположным образом). Правила знаков в гомологической алгебре тогда будут согласованы с правилом знаков в супералгебре; в частности, тензорное произведение комплексов отвечает тензорному произведению $A[\xi]$-модулей и т. п.

Пусть теперь A — суперкоммутативное кольцо ($A_1 \neq \{0\}$, вообще говоря), (S^i, d^i) — комплекс A-модулей;

в частности, его компоненты $\mathbf{Z}_2$-градуированы. Мы будем считать, что все d^i однородны и имеют одинаковую четность. Интерпретация $(\oplus S^i, \oplus d^i)$ как $\mathbf{Z}$-градуированного модуля над суперкоммутативным кольцом $A[\xi]$ по-прежнему возможна, если d^i нечетны.

В определениях естественных комплексов в супералгебре часто возникает произвол в выборе четности дифференциала; сделанное выше замечание мотивирует предпочтительных нечетных d.

Укажем один общий принцип конструирования комплексов в (супер)алгебре и затем опишем некоторые его реализации.

2. Дифференциал Кошуля. Пусть S, T — два A-модуля (A суперкоммутативно), σ_a: $S \to S$, τ_a: $T \to T$ — два конечных семейства однородных морфизмов с одним и тем же множеством индексов a. Будем говорить, что σ_a и σ_b (супер)коммутируют, если $[\sigma_a, \sigma_b] = 0$ и (супер)антикоммутируют, если $\{\sigma_a, \sigma_b\} = \sigma_a\sigma_b + (-1)^{\widetilde{\sigma a}\widetilde{\sigma}_b} \sigma_b\sigma_a = 0$. Предположим, что выполнены следующие условия: а) $\widetilde{\sigma}_a + \widetilde{\tau}_a$ не зависит от a; б) для любой пары (a, b) операторы σ_a, σ_b либо коммутируют, либо антикоммутируют, и то же верно для τ_a, τ_b.

Определим отображение $d = \sum\limits_a \sigma_a \otimes \tau_a$: $S \otimes T \to S \otimes T$; напомним, что $(\sigma \otimes \tau)(s \otimes t) = (-1)^{\widetilde{\tau}\widetilde{s}} \sigma(s) \otimes \tau(t)$.

3. Лемма. *Допустим, что в указанных условиях выполнено одно из двух предположений:*

а) *Оператор d четен, и для всех (a, b) правила коммутации для (σ_a, σ_b) и (τ_a, τ_b) противоположны.*

б) *Оператор d нечетен, и для всех (a, b) правила коммутации для (σ_a, σ_b) и (τ_a, τ_b) одинаковы.*

Тогда $d^2 = 0$.

Доказательство. Проверим, что в выражении для d^2 пропадают следующие попарные суммы:

$$\begin{aligned}(\sigma_a \otimes \tau_a)(\sigma_b \otimes \tau_b) + (\sigma_b \otimes \tau_b)(\sigma_a \otimes \tau_a) &= \\ = (-1)^{\widetilde{\tau}_a\widetilde{\sigma}_b} \sigma_a\sigma_b \otimes \tau_a\tau_b + (-1)^{\widetilde{\sigma}_a\widetilde{\tau}_b} \sigma_b\sigma_a \otimes \tau_b\tau_a &= \\ = \left[(-1)^{\widetilde{\tau}_a\widetilde{\sigma}_b} + (-1)^{\widetilde{\sigma}_a\widetilde{\tau}_b} (-1)^{\widetilde{\sigma}_a\widetilde{\sigma}_b + \widetilde{\tau}_a\widetilde{\tau}_b}\varepsilon\eta\right] \sigma_a\sigma_b \otimes \tau_a\tau_b&,\end{aligned}$$

где ε, η — знаки коммутации σ_a, σ_b и τ_a, τ_b соответственно: $\sigma_a\sigma_b = (-1)^{\widetilde{\sigma}_a\widetilde{\sigma}_b} \sigma_b\sigma_a\varepsilon$. Если d четен, то $\widetilde{\tau}_a = \widetilde{\sigma}_a$, $\widetilde{\tau}_b = \widetilde{\sigma}_b$, $\varepsilon\eta = -1$. Если d нечетен, то $\widetilde{\tau}_a = \widetilde{\sigma}_a + 1$, $\widetilde{\tau}_b = \widetilde{\sigma}_b + 1$, $\varepsilon\eta = 1$.

В обоих случаях коэффициент в квадратных скобках равен нулю. ■

4. Абстрактный комплекс де Рама. Пусть A — суперкоммутативная B-алгебра, (X_a) — конечное семейство однородных супердифференцирований A над B; $[X_a, X_b] = 0$ для всех a, b; (ω_a) — семейство свободных над B переменных. Конструкция леммы 3 приводит к двум комплексам. Первый — комплекс де Рама с четным дифференциалом:

$$\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}_{\text{ev}}(A/B;\ (X_a)) = B\{\omega_a\} \underset{B}{\otimes} A; \quad \tilde{\omega}_a = \tilde{X}_a;\ \{\omega_a, \omega_b\} = 0;$$

$$d_{\text{ev}} = \sum_a \omega_a \otimes X_a.$$

Второй — комплекс де Рама с нечетным дифференциалом:

$$\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}_{\text{odd}}(A/B;\ (X_a)) = B[\omega_a] \underset{B}{\otimes} A; \quad \tilde{\omega}_a = \tilde{X}_a + 1;$$

$$[\omega_a, \omega_b] = 0; \quad d_{\text{odd}} = \sum \omega_a \otimes X_a.$$

В формулах для d элемент кольца ω_a понимается как оператор левого умножения на этот элемент.

$\mathbf{Z}$-градуировку можно выбирать разными способами, например $\deg A = 0$, $\deg \omega_a = 1$, или $\deg \omega_a = (-1)^{\tilde{\omega}_a}$. Если среди X_a хоть одно дифференцирование нечетно, то комплекс получается бесконечным.

В супергеометрии эта конструкция приводит к версиям обычного комплекса де Рама, если положить (для гладкого случая)

$$B = R, \quad A = C^\infty(x^1, \ldots, x^m)[\xi^1, \ldots, \xi^n],$$

$$(X_a) = \left(\frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}\right), \quad \omega_a = (dx^b, d\xi^b).$$

Действие частных производных определяется очевидными формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\left[f(x)(\xi^1)^{\beta_1} \ldots (\xi^n)^{\beta_n}\right] = \frac{\partial f}{\partial x^a}(\xi^1)^{\beta_1} \ldots (\xi^n)^{\beta_n},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^b}\left[f(x)(\xi^1)^{\beta_1} \ldots (\xi^n)^{\beta_n}\right] =$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{a<b} \beta_a} \beta_b f(x)(\xi^1)^{\beta_1} \ldots (\widehat{\xi^b}) \ldots (\xi^n)^{\beta_n}.$$

Дифференциалы dx^a, $d\xi^b$ суперкоммутируют для нечетного d, суперантикоммутируют для четного d. Аналогично строятся комплексы де Рама вдоль слоев субмерсии, комплексно-аналитический комплекс де Рама и т. п.

5. Предложение (лемма Пуанкаре). *Комплекс де Рама кольца* $C^\infty(x^a, \xi^b)$, *описанный в предыдущем абзаце, с* $\mathbf{Z}$*-градуировкой* $\deg(dx^a) = \deg(d\xi^b) = 1$, *является правой резольвентой* R.

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega^{\cdot}_{\mathrm{odd}}$ и покажем, что стандартное доказательство леммы Пуанкаре переносится на наш случай. Прежде всего, форма нулевой $\mathbf{Z}$-степени есть функция $f = \sum\limits_\alpha f_\alpha(x^1, \ldots, x^m)\,\xi^\alpha$, и $df = 0$, если $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} = 0$ для всех i, $f_\alpha = 0$, если $|\alpha| > 0$. Поэтому f — константа.

Пусть теперь ω — форма $\mathbf{Z}$-степени $\geqslant 1$. Введем вспомогательную четную переменную t и построим форму $\omega_1(t)$ следующим образом: заменим в ω все x^i на x^it, ξ^i па ξ^it, dx^i на $d(x^it) = dx^it + x^idt$, $d\xi^i$ на $(d\xi^i)t - \xi^idt$, затем представим результат в виде $\omega(t) = \omega_0(t) + dt\cdot\omega_1(t)$, где dt не входит в $\omega_0(t)$. Положим затем $k(\omega) = k'(\omega(t)) = \int\limits_0^1 dt\,\omega_1(t)$. Проверим, что $(kd + dk)\omega = \omega$; тогда из $d\omega = 0$ следует, что $\omega = d(k\omega)$.

Более общо, для любой зависимости $\omega(t)$ от параметра t имеем $(k'd + dk')(\omega(t)) = \omega(1) - \omega(0)$. В самом деле, пусть сначала dt не входит в $\omega(t)$. Тогда $k'(\omega(t)) = 0$,

$$(k'd + dk')(\omega(t)) = k'd(\omega(t)) = k'\left(dt\frac{\partial\omega(t)}{\partial t}\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dt\,\frac{\partial\omega(t)}{\partial t} = \omega(1) - \omega(0).$$

Если же $\omega(t) = dt\,\omega_1(t)$, то $\omega(1) - \omega(0) = 0$, а с другой стороны,

$$(k'd + dk')(dt\,\omega_1(t)) = -k'(dt\,d\omega_1(t)) + d\int\limits_0^1 dt\,\omega_1(t) =$$

$$= -\int\limits_0^1 dt\,d\omega_1(t) + d\int\limits_0^1 dt\,\omega_1(t) = 0.$$

Аналогичное рассуждение проходит для относительного и комплексно-аналитического комплекса де Рама. ■

6. Комплексы Кошуля. Пусть A есть $\mathbf{Z}_2$-градуированное кольцо (не обязательно суперкоммутативное), (y_a) — конечное семейство его однородных элементов, попарно суперкоммутирующих. Пусть (e_a) и (e^a) — две свободные системы независимых суперкоммутирующих переменных. Мономы от них будем обозначать $e_\alpha = e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$ и $e^\alpha = (e^1)^{\alpha_1} \dots (e^n)^{\alpha_n}$ соответственно. Определим следующие два комплекса.

Правый комплекс Кошуля:

$$K^\cdot(A_1(y_a)) = \mathbf{Z}[e^a] \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} A = \underset{\alpha}{\oplus} e^\alpha A, \quad \widetilde{e_a} = \widetilde{y}_a + 1,$$

$$d^\cdot = \sum e^a \otimes y_a, \quad \deg A = 0, \quad \deg e_a = 1:$$

Левый комплекс Кошуля:

$$K_\cdot(A, (y_a)) = A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}[e_a] = \underset{\alpha}{\oplus} Ae_\alpha, \quad \widetilde{e}_a = \widetilde{y}_a + 1,$$

$$d_\cdot = \sum y_a \otimes \frac{\partial}{\partial e_a}, \quad \deg A = 0, \quad \deg e_a = -1.$$

В обоих случаях дифференциал нечетен и имеет степень 1 в $\mathbf{Z}$-градуировке.

7. Гомологическая интерпретация березиниана. Пусть T — свободный модуль конечного ранга над суперкоммутативным кольцом A. В симметрической алгебре $S_A(\Pi T \oplus T^*)$ рассмотрим следующий элемент d. Выберем свободные базисы (t_a) для T и (t^a) для T^* так, чтобы $(t_a, t^b) = \delta_a^b$, и положим $d = \sum\limits_a (\Pi t_a) t^a$. От этих базисов d не зависит и $d^2 = 0$. Отождествим d с левым умножением на d. Нетрудно понять, что $K_A^\cdot(T) = (S_A(\Pi T \oplus T^*), d)$ есть правый комплекс Кошуля. Пусть $H(K_A^\cdot)(T))$ — его когомологии.

Пусть (t_a) пронумерован в стандартном формате: $\tilde{t}_1 = \dots = \tilde{t}_m = 0$, $\tilde{t}_{m+1} = \dots = \tilde{t}_{m+n} = 1$. Рассмотрим элемент $\Pi t_1 \dots \Pi t_m t^{m+1} \dots t^{m+n}$. Очевидно, он является циклом. Обозначим его класс когомологий через $h(t_a)$.

8. Предложение. *Отображение* $\operatorname{Ber} T \to H(K_A^\cdot(T))$, *которое ставит в соответствие элементу* $D(t_a)$ *класс* $h(t_a)$, *не зависит от выбора базиса* (t_a) *и определяет изоморфизм* $\operatorname{Ber} T$ *и соответствующей группы когомологий, четность которого равна* $(-1)^m$.

Доказательство. Проверим сначала, что $H(K_A^\cdot(T))$ как A-модуль свободно порожден классом $h(t_a)$. Удобно изменить обозначения: пусть (x_i) — все четные, а (ξ_i) — все нечетные элементы из системы $(t^a) \cup (\Pi t_a)$, пронумерованные так, что $d = \sum x_i \xi_i$ (точнее, левое умножение на этот элемент) в кольце $K^{\cdot}_A(T) = A[x_i, \xi_i] = B$. Введя в этом комплексе $\mathbf{Z}$-градуировку, в которой $\deg \xi_i = 1$, $\deg x_i = 0$, получаем, что он является обычным коммутативным комплексом Кошуля, так что

$$H^i(B) = 0 \quad \text{при} \quad i \leqslant n-1;$$

$$H^n(B) = (B\xi_1 \ldots \xi_n)/\left(\sum Bx_i\right)\xi_1 \ldots \xi_n \simeq A\xi_1 \ldots \xi_n.$$

Остается проверить, что $D(t_a)$, $h(t_a)$ одинаково ведут себя относительно смены базисов. Это очевидно для диагональных замен и элементарных верхних и нижних треугольных замен. Например, при замене t_{m+1} на $t'_{m+1} = ft_{m+1}$, $f \in A_0$ обратим, $D(t_a)$ умножается на f^{-1} (березиниан замены), и $h(t_a)$ также умножается на f^{-1}, ибо t^{m+1} заменяется на $f^{-1}t^{m+1}$, чтобы сохранилась двойственность базисов. ■

§ 5. Скалярные произведения

1. Билинейные формы. Пусть A — суперкоммутативное кольцо, T_1, T_2 — A-модули. Билинейной формой называется четный или нечетный морфизм A-модулей $b\colon T_1 \underset{A}{\otimes} T_2 \to A$; соответственно форма называется четной или нечетной. Билинейная форма однозначно отождествляется с функцией $b(t_1, t_2) = b(t_1 \otimes t_2)$, удовлетворяющей следующим условиям:

а) b биаддитивна и однородна;

б) $b(at_1, t_2) = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ab(t_1, t_2)$, $\quad b(t_1, t_2 a) = b(t_1, t_2)a$, $a \in A$, $t_i \in T_i$.

Поставим в соответствие элементу $t_1 \in T_1$ отображение $t_2 \mapsto b(t_1, t_2)$. Последнее линейно справа по t_2 и однородно степени $\tilde{b} + \tilde{t}_1$; его зависимость от t_1 такова, что мы получаем морфизм $T_1 \to T_2^*$ той же степени, что b. Обычно мы будем обозначать этот морфизм той же буквой b.

Форма b называется невырожденной, если $b\colon T_1 \to T_2^*$ — изоморфизм. Заметим, что для $\tilde{b} = 1$ тогда $\operatorname{rk} T_1 = p|q$, $\operatorname{rk} T_2 = q|p$.

Форма b называется прямой, если ядро и образ этого морфизма являются прямыми слагаемыми. (Это понятие важно при рассмотрении суперaналогов векторных расслоений с послойной метрикой, где вместо расслоений рассматриваются их модули локальных сечений.)

2. Две инволюции. Пусть $b\colon T_1 \otimes T_2 \to A$ — билинейная форма.

а) Положим $b^{\tau}(t_1, t_2) = (-1)^{\tilde t_1 \tilde t_2} b(t_2, t_1)$. Легко проверить, что b^{τ} — билинейная форма той же четности, что и b; она определяет морфизм $b^{\tau}\colon T_2 \to T_1^*$. Имеем $(b^{\tau})^{\tau} = b$.

б) Положим $b^{\pi}(\Pi t_1, \Pi t_2) = (-1)^{\tilde t_1} b(t_1, t_2)$. Отображение $b^{\pi}\colon \Pi T_1 \times \Pi T_2 \to A$ является билинейной формой той же четности, что и b. Вот проверка линейности по первому аргументу:

$$b^{\pi}(a\Pi t_1, \Pi t_2) = b^{\pi}((-1)^{\tilde a}\Pi(at_1), \Pi t_2) =$$
$$= (-1)^{\tilde a + \widetilde{at}_1} b(at_1, t_2) = (-1)^{\tilde t_1 + \tilde a \tilde b} ab(t_1, t_2) =$$
$$= (-1)^{\tilde a \tilde b} ab^{\pi}(\Pi t_1, \Pi t_2).$$

Имеем $(b^{\pi})^{\pi} = b$.

3. Матрица Грама. Если T_1 и T_2 свободны, с базисами (e_i) и (e_j') из однородных элементов соответственно, то мы можем задавать билинейную форму b ее матрицей Грама, которая, по определению, равна: $b_{ij} = (-1)^{\tilde b \tilde e_i} b(e_i, e_j')$. Формат матрицы, конечно, определяется четностью e_i и e_j'. Задавая t_1, t_2 соответственно левыми и правыми координатами, находим

$$b(t_1, t_2) = b\left(\sum a_i e_i, \sum e_j' a_j'\right) =$$
$$= \sum_i \sum_j (-1)^{\tilde b \tilde a_i} a_i b(e_i, e_j') a_j' = (-1)^{\tilde b \tilde t_1} \sum_i \sum_j a_i b_{ij} a_j'.$$

Пусть B — матрица Грама формы b, записанная в стандартном формате $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица B^{τ} формы b^{τ}, записанная в тех же базисах, имеет следующий вид:

$$B^{\tau} = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_1^t & B_3^t \\ B_2^t & -B_4^t \end{pmatrix} & \text{при } \tilde B = 0, \\ \begin{pmatrix} B_1^t & -B_3^t \\ -B_2^t & -B_4^t \end{pmatrix} & \text{при } \tilde B = 1. \end{cases}$$

Аналогично, матрица B^{π} формы b^{π}, записанная в базисах Πe_i, $\Pi e'_j$, переведенных в стандартный формат, имеет вид

$$B^{\pi} = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_4 & B_3 \\ -B_2 & -B_1 \end{pmatrix} & \text{при} \quad \widetilde{B} = 0; \\ \begin{pmatrix} -B_4 & -B_3 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} & \text{при} \quad \widetilde{B} = 1. \end{cases}$$

4. **Условия симметрии.** Пусть теперь $T_1 = T_2 = T$. Тогда вместе с формой b получаем b^{τ} на том же A-модуле T, и, как в случае коммутативной алгебры, мы можем назвать форму симметричной или антисимметричной, если $b^{\tau} = b$ или $b^{\tau} = -b$. Ниже указаны матрицы Грама и сокращенные обозначения четырех возможных комбнаций четности и симметрии:

$$\begin{matrix}\text{тип OSp} \\ \text{(четная симметричная):}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 = B_1^t & B_2 \\ B_2^t & B_4 = -B_4^t \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}\text{тип SpO} \\ \text{(четная антисимметричная):}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 = -B_1^t & B_2 \\ -B_2^t & B_4 = B_4^t \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}\text{тип ПО} \\ \text{(нечетная симметричная):}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 = B_1^t & B_2 \\ -B_2^t & B_4 = -B_4^t \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}\text{тип ПSp} \\ \text{(нечетная антисимметричная):}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix} B_1 = -B_1^t & B_2 \\ B_2^t & B_4 = B_4^t \end{pmatrix}.$$

Если b удовлетворяет одному из этих условий симметрии, то b^{π} имеет ту же четность, но противоположную симметрию: при $b^{\tau} = \eta^b$, $\eta = \pm 1$ имеем

$$\begin{aligned} b^{\pi\tau}(\Pi t, \Pi t') &= (-1)^{(\widetilde{t}+1)(\widetilde{t'}+1)} b^{\pi}(\Pi t', \Pi t) = \\ &= (-1)^{\widetilde{t}\,\widetilde{t'}+\widetilde{t}+1} b(t', t) = (-1)^{\widetilde{t}+1} b^{\tau}(t, t') = \\ &= (-1)^{\widetilde{t}+1} \eta^{b(t,t')} = -\eta b^{\pi}(\Pi t, \Pi t'). \end{aligned}$$

5. **Изотропные подмодули.** Пусть T — свободный A-модуль с невырожденным скалярным произведением b. Пусть S — прямой подмодуль в T (выделяющийся прямым слагаемым) ранга $d = d_0 | d_1$ и коранга $c = c_0 | c_1$. Тогда $S^{\perp} = \{f \in T^* \mid S \subset \operatorname{Ker} f\}$ является прямым подмодулем в T^*

ранга c и коранга d, а $S_b^{\perp} = b^{-1}(S^{\perp})$ — прямым подмодулем в T того же ранга и коранга, если b четна, и Π — противоположного ранга и коранга, если b нечетна. Подмодуль $S \subset T$ называется b-изотропным, если $S \subset S_b^{\perp}$.

Отсюда следует, что максимальный ранг изотропного подмодуля может быть $r|s$ для $\mathrm{O\,Sp}(2r|2s)$, $\mathrm{O\,Sp}(2r+1|2s)$ и $\Pi\,\mathrm{Sp}(r+s|r+s)$. Этот ранг достигается для скалярных произведений со следующими матрицами Грама:

$$\mathrm{O\,Sp}(2r\,|\,2s):\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & E_r \\ E_r & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & E_s \\ -E_s & 0 \end{matrix} \end{array}\right),$$

$$\mathrm{O\,Sp}(2r+1\,|\,2s):\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|cc} 1 & 0\ldots & 0 \\ \cline{2-3} 0 & 0 & E_r \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & E_r & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & E_s \\ -E_s & 0 \end{matrix} \end{array}\right),$$

$$\Pi\,\mathrm{Sp}(r+s\,|\,r+s):\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{r+s} \\ \hline E_{r+s} & 0 \end{array}\right).$$

Случаи $\mathrm{Sp\,O}$ и $\Pi\mathrm{O}$ получаются из этих применением операции π.

Мы будем называть скалярные произведения, допускающие такие матрицы Грама, расщепимыми, а соответствующие базисы — расщепляющими.

Заметим, что для типа $\Pi\,\mathrm{Sp}$ максимальные изотропные подмодули в T могут иметь разные ранги.

§ 6. Вещественные структуры

1. Вещественные структуры в коммутативной алгебре. В § 3 гл. 1, мы строили «вещественные сечения» комплексного пространства Минковского как множества неподвижных точек антиголоморфной инволюции. В § 1 гл. 2 было отмечено, что естественно возникают вещественные структуры на комплексных многообразиях, которые вообще не имеют неподвижных точек; тем не менее такой объект, как «вещественно-аналитическая окружность радиуса i: $x^2 + y^2 = -1$» должен быть равноправным пространством соответствующей категории. В самом деле, отсутствие точек здесь — это отсутствие $\mathbf{R}$-точек; точки «со значениями в других вещественно-аналитических многообразиях» на этой окружности есть в достаточном количестве. В супергеометрии все эти возможности сохраняются и дополняются типично нечетными эффектами.

В коммутативной алгебре основные определения таковы.

а) Вещественная структура на коммутативной $\mathbf{C}$-алгебре A есть $\mathbf{C}$-антилинейный изоморфизм «комплексного сопряжения» $A \to A$, $a \mapsto a^\rho$ со свойствами $a^{\rho\rho} = a$, $(ab)^\rho = a^\rho b^\rho$, $(\alpha a)^\rho = \bar{\alpha} a^\rho$, $\alpha \in \mathbf{C}$. Положим $A^0 = \{a \mid a^\rho = a\}$. Тогда $A = \mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} A^0 = A^0 \oplus A^0 i$, ибо $a = \frac{a + a^\rho}{2} + \frac{a - a^\rho}{2}$; $(a + bi)^\rho = a - bi$ для a, $b \in A^0$. Поэтому удобно писать $\bar{a}$ вместо a^ρ. Задание ρ равносильно заданию $\mathbf{R}$-подалгебры вещественных элементов A^0.

б) Продолжением ρ до вещественной структуры на A-модуле S называется отображение $S \to S$, $s \mapsto s^\rho$, для которого

$$(as)^\rho = a^\rho s^\rho, \quad s^{\rho\rho} = s.$$

Полагая аналогично $S^0 = \{s \mid s^\rho = s\}$, имеем $S = \mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} S^0 = S^0 \oplus S^0_i$, $(s + t_i)^\rho = s - t_i$ для s, $t \in S^0$, так что снова естественно писать $s^\rho = \bar{s}$. Вещественные элементы S^0 образуют A^0-подмодуль в S.

в) Продолжением ρ до кватернионной структуры на A-модуле S называется отображение $S \to S$, $s \mapsto s^\rho$, для которого $(as)^\rho = a^\rho s^\rho$, $s^{\rho\rho} = -s$. Вещественных элементов в S нет.

г) Если A некоммутативно, то естественно рассматривать на A также эрмитову структуру, меняющую порядок умножения:

$$a^{\rho\rho} = a, \quad (\alpha a)^\rho = \bar{\alpha} a^\rho, \quad (ab)^\rho = b^\rho a^\rho.$$

В супералгебре мы примем следующее определение.

2. Определение.

а) (*Обобщенной*) *вещественной структурой типа* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, на $\mathbf{Z}_2$-градуированной $\mathbf{C}$-алгебре A называется четное $\mathbf{R}$-линейное отображение $A \to A$, $a \mapsto a^\rho$, со свойствами:

$$(\alpha a)^{\rho} = \bar{\alpha} a, \ \alpha \in \mathbf{C}; \ \ a^{\rho\rho} = (\varepsilon_1)^{\tilde{a}} a;$$

$$(ab)^{\rho} = \varepsilon_3 (\varepsilon_2)^{\tilde{a}\tilde{b}} b^{\rho} a^{\rho}.$$

б) *Продолжением вещественной структуры* ρ на A-бимодуль S называется однородное отображение $S \to S$: $s \mapsto s^{\rho}$ со свойствами:

$$s^{\rho\rho} = \eta \left[(-\varepsilon_2)^{\tilde{\rho}} \varepsilon_1\right]^{\tilde{s}} s; \ (as)^{\rho} = \varepsilon_3 (\varepsilon_2)^{\tilde{a}\tilde{s}} s^{\rho} a^{\rho};$$

$$(sa)^{\rho} = (-1)^{\tilde{\rho}\tilde{a}} \varepsilon_3 (\varepsilon_2)^{\tilde{s}\tilde{a}} a^{\rho} s^{\rho}.$$

Типом этого продолжения называется $(\eta, \tilde{\rho})$. ■

3. Замечания.

а) Если A суперкоммутативно, то на A_0 при $\varepsilon_3 = 1$ индуцируется вещественная структура, а A_0-модуль A_1 становится вещественным либо кватернионным в зависимости от знака ε_1. Умножение нечетных элементов при сопряжении сохраняет или меняет порядок при $\varepsilon_3\varepsilon_2 = -1$ или $\varepsilon_3\varepsilon_2 = 1$ соответственно. Если A — кольцо с единицей, то $\varepsilon_3 = 1^{\rho}$, поэтому чаще всего $\varepsilon_3 = 1$; но для алгебр Ли рассмотрение типа $(-1, -1, -1)$ необходимо.

б) Продолжение ρ на S естественно назвать супервещественным или суперкватернионным в зависимости от знака η. Если A суперкоммутативно, то пары структур, индуцированных на A_0-модулях S_0, S_1, зависят от типа продолжения при $\tilde{\rho} = 0$; при $\tilde{\rho} = 1$, конечно, ρ меняет местами S_0 и S_1.

Выбор знаков в замечании б) можно оправдать, если постулировать сначала тождества типа $s^{\rho\rho} = \eta_1 (\eta_2)^{\tilde{s}} s$, $(as)^{\rho} = \eta_3 (\eta_4)^{\tilde{a}\tilde{s}} s^{\rho} a^{\rho}$, и затем выразить η_i через ε_i с помощью тождеств $[a(bs)]^{\rho} = [(ab)s]^{\rho}$, $(as)^{\rho\rho} = \eta_1 (\eta_2)^{\tilde{a}+\tilde{s}} as$.

4. Производные вещественные структуры. Пусть теперь на A задана вещественная структура ρ типа $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, а на A-бимодулях S, S' — ее продолжения типов $(\eta, r = \tilde{\rho})$, $(\eta', r' = \tilde{\rho}')$ соответственно. В приведенной ниже таблице собраны сведения о ряде вещественных структур, которые можно определить через исходные. Ниже даны некоторые комментарии и вычисления к таблице.

5. Структура ρ^{-1}. На A отображение ρ^2 есть автоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр, тождественный при $\varepsilon_1 = 1$; $\rho^4 = id$ на A

Производные вещественные структуры

На чем	Определение	Тип	Дополнительные сведения
A	ρ^{-1}	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	$\rho^{-1}=\rho$ при $\varepsilon_1=1$
S	ρ^{-1}	(η, r)	Только при $(-\varepsilon_2)^r=1$
$\mathrm{Der}_{\mathrm{C}}(A, S)$	$X^\rho a=(-\varepsilon_2)^{\tilde{X}\tilde{a}}\left(Xa^{\rho^{-1}}\right)^\rho$	$(1, r)$ (A-модуль)	$X^\rho \in \mathrm{Der}_{\mathrm{C}}(A, S)$ всегда; аксиомы вещественной структуры выполнены, если A суперкоммутативно и $r=0$
$\mathrm{Der}_{\mathrm{C}}(A, A)$	«	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$ (алгебра Ли)	«
$\Omega^1_{\mathrm{ev}}A$ $\Omega^1_{\mathrm{odd}}A$	$(da)^\rho=da^\rho$ $(da)^\rho=(-\varepsilon_2)^{\tilde{a}}da^\rho$	$(1, 0)$ $(\varepsilon_1, 0)$	A суперкоммутативно; структура определяется условием $d^\rho=d$
$S\otimes S'=S'\otimes S$	$(s\otimes t)^\rho=(-1)^{r\tilde{t}}\varepsilon_3(\varepsilon_2)^{\tilde{s}\,\tilde{t}}t^\rho\otimes s^\rho$	$\left(\eta\eta'(-\varepsilon_2)^{rr'},\ r+r'\right)$	A суперкоммутативно; иначе $S\otimes S'\neq S'\otimes S$
$A[S]$	«	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	Только при $\eta=1$, $r=0$
$\Omega^{\cdot}_{\mathrm{odd}}A$	«	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	Только при $\varepsilon_1=1$.

и S. Отображение $\rho^{-1}=\rho^3$ на A всегда является вещественной структурой, а на S — только при условии $r=0$, либо $r=1$, $\varepsilon_2=-1$: иначе нарушается тождество для $(as)^\rho$.

6. Дифференцирования. Пусть $X\colon A\to S$ — однородное дифференцирование над **C**. Положим $X^\rho a=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{X}\,\widetilde{a}}(Xa^{\rho-1})^\rho$. Проверим формулу Лейбница для X^ρ:

$$X^\rho(ab)=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{X}(\widetilde{a}+\widetilde{b})}(X(\varepsilon_3\varepsilon_2{}^{\widetilde{a}\,\widetilde{b}}b^{\rho^{-1}}a^{\rho^{-1}}))^\rho=\varepsilon[X(b^{\rho^{-1}}a^{\rho^{-1}})]^\rho,$$

$$\varepsilon=(-1)^{\widetilde{X}(\widetilde{a}+\widetilde{b})}\varepsilon_2^{\widetilde{X}(\widetilde{a}+\widetilde{b})+\widetilde{a}\widetilde{b}}\varepsilon_3.$$

Далее,

$$[X(b^{\rho^{-1}}a^{\rho^{-1}})]^\rho=[Xb^{\rho^{-1}}\cdot a^{\rho^{-1}}+(-1)^{\widetilde{X}\widetilde{b}}b^{\rho^{-1}}Xa^{\rho^{-1}}]^\rho=$$

$$=(-1)^{\widetilde{\rho}\,\widetilde{a}}\varepsilon_3\,(\varepsilon_2)^{(\widetilde{b}+\widetilde{X})\widetilde{a}}a\,(Xb^{\rho^{-1}})^\rho+$$

$$[+(-1)^{\widetilde{X}\widetilde{b}}\varepsilon_3\,(\varepsilon_2)^{\widetilde{b}(\widetilde{X}+\widetilde{a})}\,(Xa^{\rho^{-1}})^\rho b.$$

Умножая правую часть на ε, получаем

$$X^\rho\,(ab)=X^\rho a\cdot b+(-1)^{(\widetilde{X}+\widetilde{\rho})\widetilde{a}}a\cdot X^\rho b.$$

Проверим тождество вещественной структуры для $(bX)^\rho$:

$$(bX)^\rho a=(-\varepsilon_2)^{(\widetilde{b}+\widetilde{X})\widetilde{a}}\,(b\,(Xa^{\rho^{-1}}))^\rho=$$

$$=(-\varepsilon_2)^{(\widetilde{b}+\widetilde{X})\widetilde{a}}\varepsilon_3\,(\varepsilon_2)^{\widetilde{b}(\widetilde{X}+\widetilde{a})}\,(Xa^{\rho^{-1}})^\rho\cdot b^\rho=$$

$$=\varepsilon_3\,(\varepsilon_2)^{\widetilde{b}\widetilde{X}}\,(-1)^{\widetilde{b}\,\widetilde{a}}\,(X^\rho a)\,b^\rho.$$

Поэтому $(bX)^\rho=\varepsilon_3\,(\varepsilon_2)^{\widetilde{b}\,\widetilde{X}}X^\rho\cdot b^\rho$, если кольцо A суперкоммутативно, и на $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}\,(A,S)$ правое умножение согласовано с левым. Аналогично проверяется в этом случае тождество для $(X\cdot b)^\rho$. Далее,

$$X^{\rho^2}(a)=(-\varepsilon_2)^{(\widetilde{X}+\widetilde{\rho})\widetilde{a}}\,(X^\rho a^{\rho^{-1}})^\rho=$$

$$=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{\rho}\,\widetilde{a}}\,(Xa^{\rho^{-2}})^{\rho^2}=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{\rho}\,\widetilde{a}}\varepsilon_1^{\widetilde{X}}Xa.$$

Поэтому $X^{\rho^2}=\varepsilon_1^{\widetilde{X}}X$ при $\widetilde{\rho}=0$.

Наконец, проверим, что $[X,Y]^\rho=(\varepsilon_2)^{\widetilde{X}\widetilde{Y}}[Y^\rho,X^\rho]$. Имеем

$$Y^\rho X^\rho a=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{X}\widetilde{a}+\widetilde{Y}\,\widetilde{a}+\widetilde{X}\widetilde{Y}}(YXa^{\rho^{-1}})^\rho;$$

$$[Y^\rho,X^\rho]\,a=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{X}\widetilde{a}+\widetilde{Y}\widetilde{a}+\widetilde{X}\widetilde{Y}}\,([Y,X]\,a^{\rho^{-1}})^\rho=$$

$$=(-\varepsilon_2)^{\widetilde{X}\widetilde{Y}}\,[Y,X]^\rho a.$$

7. Дифференциалы. Пусть A — суперкоммутативно, d: $A\to\Omega^1A$ — универсальное супердифференцирование над $\mathbf{C}$, четное или нечетное. На Ω^1A имеется не более одного продолжения ρ, которое удовлетворяет условиям $\tilde{\rho}=0$, $d^\rho=d$. Действительно, из $db=d^\rho b=(-\varepsilon_2)^{\tilde{d}\cdot\tilde{a}}(db^{\rho^{-1}})^\rho$, полагая $b=a^\rho$, находим $(da)^\rho=(-\varepsilon_2)^{\tilde{d}\cdot\tilde{a}}d(a^\rho)$, что определяет действие ρ на все образующие Ω^1A. (То же рассуждение применимо к кольцу гладких функций A.) Существование этого продолжения проверяется механически.

8. Тензорные произведения. Для $s\in S$, $t\in S'$ положим

$$(s\otimes t)^\rho=(-1)^{r\tilde{t}}\varepsilon_3(\varepsilon_2)^{\tilde{s}\tilde{t}}t^{\rho'}\otimes s^\rho,$$

Мы снова предполагаем, что A суперкоммутативно, и отождествляем $S\otimes S'$ с $S'\otimes S$. Вместо ρ' будем писать ρ для краткости. Некоторые проверки:

$$(s\otimes at)^\rho=(-1)^{r(\tilde{t}+\tilde{a})}(\varepsilon_2)^{\tilde{s}\tilde{a}+\tilde{s}\tilde{t}+\tilde{a}\tilde{t}}t^\rho a^\rho\otimes s^\rho=(sa\otimes t)^\rho,$$

$$(s\otimes t)^{\rho\rho}=(-1)^{r\tilde{t}}\varepsilon_3(\varepsilon_2)^{\tilde{s}\tilde{t}}(t^\rho\otimes s^\rho)^\rho=$$

$$=(-1)^{\tilde{r}\tilde{t}+r'(\tilde{s}+r)}(\varepsilon_2)^{r'\tilde{s}+r\tilde{t}+rr'}\eta\left[(-\varepsilon_2)^r\varepsilon_1\right]^{\tilde{s}}\eta'\left[(-\varepsilon_2)^{r'}\varepsilon_1\right]^{\tilde{t}}s\otimes t=$$

$$=\eta\eta'(-\varepsilon_2)^{rr'}\left[(-\varepsilon_2)^{r+r'}\varepsilon_1\right]^{\tilde{s}+\tilde{t}}s\otimes t.$$

9. Геометрический язык. Пусть A — кольцо голоморфных функций на комплексном супермногообразии M, скажем, Штейна, чтобы его точки разделялись функциями. (Мы несколько забежали вперед: точные определения см. в следующей главе.) Будем говорить, что вещественная структура ρ на A типа $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$ есть также вещественная структура на M. Пусть B — еще одно суперкоммутативное кольцо с вещественной структурой такого же типа. B-точкой M назовем гомоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр x: $A\to B$. Вещественной B-точкой назовем гомоморфизм, перестановочный с ρ.

Пусть $f\in A$; тогда f можно рассматривать как функцию на B-точках со значением в B, полагая $f(x)=x(f)$. Будем обозначать сопряжение в B чертой. Тогда условие вещественности точки x, т. е. $x(f^\rho)=\overline{x(f)}$, можно записать в виде

$$f^\rho(x)=\overline{f(x)}.$$

Это устанавливает связь между нашими определениями и их стандартным чисто четным вариантом из § 1 гл. 2. Приложения к суперпространству Минковского описаны в § 1 гл. 5.

10. Структуры соседства. Пусть A — суперкоммутативное кольцо. Функторы Π и $*$ — это естественные «дискретные симметрии» на категории A-модулей. Если A снабжено вещественной структурой ρ, $\varepsilon_3 = 1$, то можно аналогично трактовать ее продолжения на A-модули S. Точнее, по A и S определим кольцо A^{t} и A^{t}-модуль S^{t}, положив $A_i^{\mathrm{t}} = A_i$, $S_i^{\mathrm{t}} = S_i$; $a^{\mathrm{t}}b^{\mathrm{t}} = (\varepsilon_2)^{\tilde{a}\tilde{b}}(ba)^{\mathrm{t}}$, $a^{\mathrm{t}}s^{\mathrm{t}} = (\varepsilon_2)^{\tilde{a}\tilde{s}}(sa)^{\mathrm{t}}$. Тогда ρ на A можно рассматривать как **C**-антилинейный изоморфизм $\rho\colon A \to A^{\mathrm{t}}$, а продолжение ρ на S — как изоморфизм A-модулей $S \to \rho^*(S^{\mathrm{t}})$. Назовем модули ΠS, S^* и $\rho^*(S^{\mathrm{t}})$, а также модули, полученные применением к S этих операций несколько раз, *соседними* с S. Назовем *структурой соседства* на S задание изоморфизма S с соседним модулем. Важнейший класс структур соседства составляют те из них, которые обладают большой группой автоморфизмов; супергруппы Ли классического типа и можно определить как такие группы автоморфизмов. Среди рассматривавшихся ранее структур следующие являются структурами соседства: $b\colon S \to S^*$ (четная билинейная форма), $b\colon S \to \Pi S^*$ (нечетная билинейная форма), $\rho\colon S \to \rho^*(S^{\mathrm{t}})$ (вещественная структура). Специфична для супералгебры «П-симметрия» — структура соседства $p\colon S \to \Pi S$.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 3

«Правило знаков», было, конечно, хорошо известно в топологии и гомологической алгебре. Ф. А. Березин один из первых стал систематически рассматривать суперкоммутативную алгебру как обобщение коммутативной (см. [4]); изобретение им супердетерминанта было важным открытием. По поводу разных аспектов супералгебры см. [18], [54]; фундаментальная работа Каца [80] содержит классификацию простых конечномерных супералгебр Ли, которые перечислены в § 10 следующей главы; она была переизложена в [98].

Глава 4

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРГЕОМЕТРИЮ

Основным объектом в супергеометрии являются суперпространства — «пространства, часть координат у которых коммутирует, а другая часть антикоммутирует». Точное определение суперпространств и их отображений дается в терминах пучков. Изложению основных сведений о суперпространствах посвящена эта глава. В § 1 вводятся основные определения, в частности понятие супермногообразия, у которого имеются локальные системы независимых координатных функций. В § 2 объяснено, как супермногообразия и superрасслоения в гладкой категории классифицируются с точностью до изоморфизма. Препятствием к выполнимости аналогичных теорем для комплексных многообразий служат когомологические инварианты. В § 3 введены суперпространства флагов, важные сами по себе и хорошо иллюстрирующие общую теорию. В § 4 собраны очевидные супергеометрические определения теории интегрируемости: теорема Фробениуса, связности. В § 5 введены специфические для супергеометрии объекты — интегральные формы. Комплекс интегральных форм строится по канонической правой связности на пучке форм объема Березина супермногообразия; понятие правой связности на произвольном векторном суперрасслоении определено и изучено здесь же. Интегрированию на супермногообразиях посвящены §§ 6—9. Основное понятие здесь — интеграл Березина от формы объема с компактным носителем на супермногообразии, определенный в § 6. Различные производные конструкции, которые позволяют определить интегралы по иммерсированным супермногообразиям любой размерности, описаны в §§ 7 и 9. Формула Стокса для интегральных форм доказана в § 8. Наконец, в § 10 приведен список конечномерных простых супералгебр Ли над полем комплексных чисел.

§ 1. Суперпространства и супермногообразия

1. Определение. *Суперпространством* называется пара $(M, \mathcal{O}_M)$, состоящая из топологического пространства M и пучка суперкоммутативных колец $\mathcal{O}_M$ на нем, такого, что слой $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{M,x}$ в любой точке $x \in M$ является локальным кольцом. ■

В определении подразумевается, конечно, что все морфизмы ограничения структурного пучка $\mathcal{O}_M$ совместимы с градуировкой. Впредь все морфизмы структурных пучков, пучков модулей над ними, тензорные произведения и т. п. автоматически считаются подчиняющимися правилу знаков и прочим соглашениям гл. 5. Иногда мы не упоминаем явно $\mathcal{O}_M$, обозначая суперпространство просто M. На открытом подмножестве $U \subset M$ индуцируется структура суперпространства $(U, \mathcal{O}_M | U)$, которое мы называем открытым под(супер)пространством M.

Объекты основных геометрических категорий — дифференцируемые, аналитические многообразия, аналитические пространства, схемы — все являются суперпространствами с $\mathcal{O}_{M,0} = \mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}_{M,1} = \{0\}$. Такие суперпространства мы будем называть чисто четными. Слой структурного пучка $\mathcal{O}_x$ в точке x на чисто четном многообразии M состоит из ростков функций, определенных вблизи x; максимальный идеал $m_x \subset \mathcal{O}_x$ состоит из ростков тех функций, которые обращаются в нуль в точке x. На общем суперпространстве m_x содержит ростки всех нильпотентных сечений структурного пучка, в частности всех нечетных сечений.

2. Определение. *Морфизмом суперпространств* $(M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ называется пара (φ, ψ), где $\varphi: M \to N$ — непрерывное отображение топологических пространств, $\psi: \mathcal{O}_N \to \varphi_* (\mathcal{O}_M)$ — такой морфизм пучков колец, что для любой точки $x \in M$ гомоморфизм $\psi_x: \mathcal{O}_{N,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{M,x}$ является локальным: $\psi_x(m_{\varphi(x)}) \subset m_x$. ■

Для тех суперпространств, структурный пучок которых состоит из ростков настоящих функций, разделяющих точки, нет надобности задавать φ и ψ отдельно.

Если φ задано, ψ восстанавливается по нему как перенос (локальной) функции в обратную сторону, по формуле $\psi_x(f)(x) = f(\varphi(x))$. Если ψ задано, φ восстанавливается по нему, поскольку любую точку M и N можно отождествить по ее локальным координатам.

В общем случае сечения структурного пучка нельзя неявно отождествлять с функциями; например, нильпотенты (на инфинитезимальной окрестности аналитического пространства) как функции на точках тождественно равны нулю. Этот эффект постоянно дает себя знать в общей теории суперпространств, где нечетные сечения структурного пучка нильпотентны. В алгебраической геометрии в той мере, в какой $s \in \Gamma(\mathcal{O}_M)$ есть функция, она принимает значение в поле, зависящем от точки: $s(x) \in k(x) = \mathcal{O}_x/m_x$. Аксиома локальности отображения ψ есть минимальное условие, обеспечивающее аналог формулы $\psi(s)(x) = s(\varphi(x))$, когда обе части равны нулю. Отсюда нетрудно вывести для дифференциальных и аналитических многообразий, что эта формула верна в общем случае, если φ тождествен на постоянных функциях, т. е. технически говоря, является морфизмом над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

3. Некоторые конструкции. Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ — суперпространство. Тогда $(M, \mathcal{O}_{M,0})$ — чисто четное суперпространство, и пара $(\mathrm{id}_M, \mathcal{O}_{M,0} \subset\!\to \mathcal{O}_M)$ является проекцией $(M, \mathcal{O}_M)$ на его «четный фактор».

Введем постоянное обозначение $J_M = \mathcal{O}_{M,1} + (\mathcal{O}_{M,1})^2$. Это пучок идеалов в $\mathcal{O}_M$. Положим $\mathrm{Gr}_i\mathcal{O}_M = J_M^i/J_M^{i+1}$. Тогда $\mathrm{Gr}_0\,\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_M/J_M$ — пучок колец, и $(M, \mathrm{Gr}_0\,\mathcal{O}_M)$ — чисто четное суперпространство, которое мы обозначаем M_{rd}. Пара $(\mathrm{id}_M, \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M/J_M)$ является замкнутым вложением $M_{\mathrm{rd}} \to M$.

Иногда удобно также рассматривать $M_{\mathrm{red}} = (M, \mathcal{O}_M/\mathcal{N})$, где $\mathcal{N}$ — пучок всех нильпотентов в структурном пучке. Для супермногообразий, которыми мы главным образом будем заниматься ниже, $M_{\mathrm{rd}} = M_{\mathrm{red}}$.

Больше информации об M, чем M_{rd}, содержит окольцованное пространство

$$\mathrm{Gr}\,M = (M, \mathrm{Gr}\,\mathcal{O}_M) = \Bigl(M, \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{Gr}_i M\Bigr).$$

Его структурный пучок $\mathbf{Z}$-градуирован. Если мы рассматриваем $\mathrm{Gr}\,M$ как суперпространство, то всегда подразумевается соответствующая $\mathbf{Z} \bmod 2$-градуировка.

Пусть $\mathcal{E}$ — пучок $\mathcal{O}_M$-модулей. Положим аналогично $\mathrm{Gr}\,\mathcal{E} = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{Gr}_i\,\mathcal{E}$, $\mathrm{Gr}_i\mathcal{E} = \mathcal{E}J_M^i/\mathcal{E}J^{i+1}$. Часто оказывается легче вычислить $\mathrm{Gr}\,M$ и $\mathrm{Gr}\,\mathcal{E}$, чем M и $\mathcal{E}$, и, во всяком случае, информация о градуированных объектах весьма полезна. В физике соответствующие процедуры называются компонентным анализом суперполей и динамических уравнений.

4. Определение. а) Суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *расщепимым над* M^0, где $(M^0, \mathcal{O}_{M^0})$—чисто четное суперпространство, если оно изоморфно $\bigl(M^0, S_{\mathcal{O}_{M^0}}(\mathcal{E})\bigr)$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_{M^0}$-модулей чисто нечетного ранга $0|q$.

б) Суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *расщепимым*, если оно расщепимо над M_{rd}.

в) Суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$ называется *локально-расщепимым*, если у каждой точки $x \in M$ есть открытая окрестность такая, что $(U, \mathcal{O}_M|U)$ расщепимо. ■

Заметим, что если M расщепимо, то, кроме структурного вложения $M_{\mathrm{rd}} \to M$, имеется также проекция $M \to M_{\mathrm{rd}}$: $\left(\mathrm{id}_M, \mathcal{O}_M/J_M \to \mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}} \subset\!\!\to S_{\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}}(\mathcal{E})\right)$.

Теперь мы введем самый важный для дальнейшего класс суперпространств — супермногообразия.

5. Определение. *Супермногообразием — дифференцируемым, аналитическим* или *алгебраическим* — называется такое локально расщепимое суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$, что M_{rd} изоморфно обычному (чисто четному) многообразию соответствующего класса, т. е. хаусдорфову пространству со счетной базой и пучком функций, локально-изоморфному области в $\mathbf{R}^n$ с вещественными дифференцируемыми функциями либо области в $\mathbf{C}^n$ с комплексно-аналитическими функциями. ■

Многообразия отличаются от общих чисто четных пространств тем, что у каждой точки многообразия есть окрестность, в которой действует конечная система локальных независимых координат $(x^1, \ldots, x^m)$ (в алгебраическом случае это утверждение нуждается в дополнительных комментариях, на которых мы не останавливаемся). Супермногообразия поэтому можно представлять себе как суперпространства с локальными системами независимых четно-нечетных координат $(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^n)$. В качестве (ξ^i) следует брать локальный базис сечений пучка, осуществляющего локальное расщепление. Определение расщепимости означает, что между x^i и ξ^j нет никаких других соотношений, кроме следствий суперкоммутативности. Локально любая (супер)функция на M, т. е., по определению, сечение структурного пучка представляется в виде $f = \sum\limits_\alpha f_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, и это представление однозначно; здесь $f_\alpha(x)$ — локальные функции на M_{rd}, $\xi^\alpha = (\xi^1)^{\alpha_1} \ldots (\xi^n)^{\alpha_n}$, как обычно. Значением f в точке $x \in M$ называется $f \bmod m_x$. (Неприводимое) супермногообразие имеет инвариантно определенную (супер)размерность $m|n$.

Важнейшие суперпространства, которые не являются супермногообразиями, будут встречаться у нас в результате следующей конструкции: пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ — супермногообразие размерности $m|n$; тогда при $i<n$ суперпространство $M^{(i)} \doteq (M, \mathcal{O}_M/J_M^{i+1})$ не является супермногообразием. Это суперпространство — i-я инфинитезимальная окрестность «подложки» M_{rd} в M. Аналогично можно строить окрестности замкнутых подсупермногообразий в более общей ситуации. Всё M, таким образом, является «инфинитезимальной окрестностью M_{rd} в нечетных направлениях».

Разумный общий класс суперпространств, не обязательно являющихся супермногообразиями, в аналитической и алгебраической категориях вводится следующим определением.

6. Определение. *Аналитическим суперпространством* (соответственно *алгебраическим суперпространством, суперсхемой*) называется такое суперпространство $(M, \mathcal{O}_M)$, что $(M, \mathcal{O}_{M,0})$ является обычным аналитическим пространством (соответственно алгебраическим пространством, схемой), а $\mathcal{O}_{M,1}$ является когерентным пучком $\mathcal{O}_{M,0}$-модулей. ■

Окрестности $M^{(i)}$ принадлежат этому классу вместе с M.

7. Морфизмы и локальные координаты. Вернемся к случаю супермногообразий. Они склеены из суперобластей, и наша ближайшая цель — показать, что морфизмы склейки, так же как и общие морфизмы, можно записывать в локальных координатах и работать с ними так же, как в обычных геометрических категориях.

Конкретнее, пусть $U^0 \subset \mathbf{R}^m$ или $U^0 \subset \mathbf{C}^m$ — некоторая связная область, $(x^1, \ldots, x^m)$ — ее координатные функции, $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — базис сечений тривиального пучка ранга $0|n$ под ней. Мы считаем, что $\mathcal{O}_{U^0}$ — пучок C^∞-функций в первом случае и голоморфных во втором и называем суперпространство $U^{n|m} = \left(U^0, \mathcal{O}_{U^0}\left[\xi^1, \ldots, \xi^n\right]\right)$ соответственно дифференцируемой или комплексно-аналитической суперобластью, а (x, ξ) — системой координат на ней. Пусть $V^{p|q}$ — другая суперобласть того же типа, что и $U^{m|n}$, с системой координат $(y^1, \ldots, y^p; \eta^1, \ldots, \eta^q)$.

8. Предложение. *Имеются естественные биекции между следующими множествами:*

а) $\mathrm{Hom}(U, V)$ *в категории суперпространств.*

б) $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(V), \mathcal{O}(U))$ *(где $\mathcal{O}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$) в категории коммутативных супералгебр (над* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$*).*

в) *Подмножество в $\mathcal{O}_0(U)^p \oplus \mathcal{O}_1(U)^q$, где $p|q = \dim V$, состоящее из таких наборов функций $(y^i(x, \xi), \eta^j(x, \xi))$, что при $x \in U^0$ имеем $y(x, 0) \in V^0$. Морфизм $(\varphi, \psi)\colon U \to V$, задаваемый прообразами $(y^i(x, \xi), \eta^j(x, \xi))$ координатных функций V в кольце $\mathcal{O}(U)$, является локальным изоморфиз-*

мом в окрестности U' точки U, если и только если в этой точке или, что то же, в ее окрестности обратима матрица частных производных:

$$J(y, x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k} & \dfrac{\partial \eta^j}{\partial x^k}\\[2ex] \dfrac{\partial y^i}{\partial \xi^l} & \dfrac{\partial \eta^j}{\partial \xi^l}\end{pmatrix}.$$

Набросок доказательства. Отображение а) → б) ставит в соответствие морфизму $(\varphi, \psi)\colon U\to V$ морфизм колец функций $\varphi^*=\Gamma(\psi)\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_V)\to\Gamma(V, \varphi_*(\mathcal{O}_V))=\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Отображение б) ⇒ в) ставит в соответствие гомоморфизму $\varphi^*\colon \mathcal{O}(V)\to\mathcal{O}(U)$ образ системы координат $(\varphi^*(y^i), \varphi^*(\eta^j))$.

Для доказательства биективности обеих отображений следует воспользоваться тем, что функции на суперобласти в каждой точке имеют ряд Тейлора и что функция на $U^{m|n}$ определяется отрезками своих рядов Тейлора во всех точках степени $\leqslant n$. Точнее, положим $\widetilde{m}_x\subset\mathcal{O}(U)$ — идеал функций, обращающихся в нуль в точке $x\in U^0$. Тогда справедливы следующие факты:

1) $\widetilde{m}_x=(x^i-x_0^i;\, \xi^j)$.

2) $\mathcal{O}(U)/\widetilde{m}_x^k\simeq K\left[x^i-x_0^i,\, \xi^j\right] \operatorname{mod}\left((x^\varepsilon-x_0)^\alpha\xi^\beta \,\middle|\, |\alpha|+|\beta|\geqslant k\right)$, где $K=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$,

3) $\bigcap\limits_{x\in U^0}\widetilde{m}_x^{n+1}=\{0\}$.

Они сразу же следуют из соответствующих утверждений при $n=0$.

Следовательно, по $\varphi^*=\Gamma(\psi)$ однозначно восстанавливается отображение $\varphi\colon U^0\to V^0$ (на максимальных идеалах колец функций), а также отображение ψ на всевозможных отрезках рядов Тейлора и потому на всем структурном пучке. Значит, а) → б) есть вложение. Аналогично, б) → в) есть вложение, ибо, зная $\varphi^*(y^i)$, $\varphi^*(\eta^j)$, мы знаем значение φ^* на отрезках рядов Тейлора.

Наконец, в доказательстве сюрьективности этих отображений основной момент состоит в том, что мы явно определяем, как продолжить на все дифференцируемые или аналитические функции отображение, первоначально заданное только на координатах. Пусть $f(y^i, \eta^j)=\sum f_\alpha(y)\,\eta^\alpha$; мы хотим подставить сюда $\varphi^*(y)=y(x, \xi)$ и $\varphi^*(\eta)=\eta(x, \xi)$, чтобы вычислить $\varphi^*(f)$. Достаточно определить $\varphi^*(f_\alpha(y))$. Напишем $\varphi^*(y^i)=y_0^i(x)+y_1^i(x, \xi)$, где y_0^i не содержит ξ

явно, а y_1^i является нильпотентом, и положим, по определению, $f_\alpha(y_0+y_1)=\sum\limits_\beta \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} f_\alpha(y_0)\, y_1^\beta$. Корректность проверяется без труда.

Заметим, что именно использование рядов Тейлора делает возможной работу с четно-нечетными системами координат и морфизмами, которые перемешивают координаты, столь же свободной, как в чисто четном случае. Если бы мы хотели определить, скажем, $f(x+\xi_1\xi_2)$ для непрерывной, но недифференцируемой функции f формулой $f(x)+f'(x)\xi_1\xi_2$, нам бы пришлось ввести обобщенные суперфункции.

Наконец, обратимся к последнему утверждению. Матрица частных производных, выписанная в предложении, есть правая матрица перехода для дифференциалов: $(dy,\ d\xi)=(dx,\ d\xi)J(y,\ x)$. Если и $(x,\ \xi)$, и $(y,\ \eta)$ образуют локальные системы координат в окрестности точки, то их дифференциалы образуют два базиса модуля Ω^1, и потому матрица перехода обратима.

Наоборот, если матрица обратима, то можно сначала определить $\varphi_0^{-1}: V'_{\rm rd} \xrightarrow{\sim} U'_{\rm rd}$, пользуясь классической теоремой о неявной функции и обратимостью $(\partial y^i/\partial x^k)$, затем продолжить φ_0^{-1} до изоморфизма первых окрестностей $\varphi_1^{-1}: V'^{(1)} \xrightarrow{\sim} U'^{(1)}$ в силу обратимости $(\partial\eta^j/\partial\xi^k)$ и, наконец, проверить разрешимость задачи продолжения $\varphi_k^{-1}: V'^{(k)} \to U'^{(k)}$ до изоморфизма $(k+1)$-х окрестностей. Мы оставляем подробности читателю. ■

9. Локально свободные пучки и векторные расслоения. Пусть $(M,\ \mathcal{O}_M)$ — суперпространство. Локально свободным пучком ранга $p|q$ на M называется пучок ($\mathbf{Z}_2$-градуированных, разумеется) $\mathcal{O}_M$-модулей $\mathcal{S}$, локально изоморфный $\mathcal{O}_M^{p|q}=\mathcal{O}_M^p\oplus(\Pi\mathcal{O}_M)^q$.

Мы будем пользоваться этим понятием, как полной заменой понятия векторного суперрасслоения над M. Аналогом векторного подрасслоения является не произвольный, а лишь локально прямой подпучок $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}$, т. е. локально выделяющийся прямым слагаемым.

Весь формализм тензорной алгебры, функтор Π, билинейные формы и т. п. переносится на общие квазикогерентные пучки $\mathcal{O}_M$-модулей и, в частности, на локально свободные пучки.

При необходимости рассматривать векторное расслоение как суперпространство в одной из стандартных категорий мы поступаем следующим образом. Тотальное суперпространство N, отвечающее пучку $\mathcal{S}$, задано вместе с проекцией π: $N \to M$ и отмеченным классом карт. Каждое открытое множество $U \subset M$, над которым $\mathcal{S}$ тривиализируется, определяет подмножество $\pi^{-1}(U) \subset N$ такое, что $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_N) \supset \supset S_{\Gamma(U,\mathcal{O}_M)}(\Gamma(U, \mathcal{S}^*))$. Иными словами, линейные функционалы на $\mathcal{S}$ — сечения $\mathcal{S}^*$ — становятся координатными функциями на N, вместе с функциями, пришедшими с N. Эти функции отмечены: они и определяют на π: $N \to \to M$ структуру векторного расслоения. В категории суперсхем естественно писать просто $N = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_M} S_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{S}^*)$. Разумеется, в категории аналитических суперпространств для восстановления всего пучка $\mathcal{O}_N$ к «полиномиальным вдоль слоя» функциям нужно добавлять все послойно аналитические и т. п.

10. Касательный и кокасательный пучки. Пусть M — супермногообразие, дифференцируемое или аналитическое. Обозначим через $\mathcal{T}M$ пучок его локальных векторных полей, т. е. (супер)дифференцирований (над **R** или **C**) колец функций. Этот пучок локально свободен ранга, равного размерности M. В области действия локальных координат (x^i, ξ^j) пучок $\mathcal{T}M$ свободно порожден своими сечениями $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)$.

Кокасательный пучок $\Omega^1 M$ можно определить двумя способами: как $\Omega^1_{\mathrm{ev}} M = (\mathcal{T}M)^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{T}M, \mathcal{O}_M)$ (пучок морфизмов) либо как $\Omega^1_{\mathrm{odd}} M = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{T}M, \Pi\mathcal{O}_M)$. Имеется дифференциал d: $\mathcal{O}_M \to \Omega^1 M$, для которого $(X, df) = Xf$ (либо ΠXf). Как в § 4 гл. 1, строятся комплексы де Рама супермногообразий.

Как в классическом случае, морфизм супермногообразий $\pi = (\varphi, \psi)$: $M \to N$ определяет морфизм пучков $\mathcal{T}M \xrightarrow{d\pi} \pi^*(\mathcal{T}N)$. Точнее, (локальное) векторное поле X на M, действуя на функции, поднятые с N, определяет на них дифференцирование со значениями в кольце функций на M. Это дает морфизм $\pi^{-1}(\mathcal{O}_N)$-модулей $\pi^{-1}(\Omega^1 N) \to \mathcal{O}_M$, или, что то же, морфизм $\mathcal{O}_M$-модулей $\pi^*(\Omega^1 N) \to \mathcal{O}_M$, или, наконец, сечение $\pi^*(\mathcal{T}N)$, которое и объявляется образом X относительно $d\pi$.

Положим $\mathcal{T}M/N = \ker d\pi$, $\Omega^1_{\mathrm{ev}}(M/N) = (\mathcal{T}^M/N)^*$. Таким образом, как в обычной геометрии, мы получаем комплексы $\mathcal{O}_M$-модулей:

$$0 \to \mathcal{T}M/N \to \mathcal{T}M \xrightarrow{d\pi} \pi^*(\mathcal{T}N),$$

$$0 \leftarrow \Omega^1_{\text{ev}}M/N \xleftarrow{\text{res}} \Omega^1_{\text{ev}}M \leftarrow \pi^*\left(\Omega^1_{\text{ev}}N\right).$$

Здесь res — ограничение дифференциальной формы на вертикальные относительно π векторные поля.

В категории супермногообразий имеются прямые произведения, конструкция которых очевидна для суперобластей и переносится с помощью склейки на общий случай.

11. Определение. *Морфизм супермногообразий* π: $M \to N$ *называется:*

а) *иммерсией, если локально он изоморфен морфизму суперобластей вида* i: $U \to U \times V$, $i^*(u^i) = u^i$, $i^*(v^j) = 0$, *где* (u^i), (v^j) *— четно-нечетные системы координаты в* U *и* V *соответственно;*

б) *субмерсией, если локально он изоморфен морфизму суперобластей вида* p: $U \times V \to V$, *где* $p^*(v^a) = v^a$ *в тех же обозначениях.* ■

12. Предложение. *В обозначениях* п. 10 *имеют место следующие факты.*

а) *Морфизм* π: $M \to N$ *является иммерсией, если и только если* $\mathcal{T}M/N = 0$ *и* $d\pi$ *— локально прямое вложение пучков.*

б) *Морфизм* π: $M \to N$ *является субмерсией, если и только если* $d\pi$ *является сюръективным морфизмом.* ■

Доказательство близко следует обычным рассуждениям в чисто четном случае, поскольку мы уже знаем, как пишутся в локальных координатах общие морфизмы и изоморфизмы. Мы опускаем подробности.

§ 2. Элементарная структурная теория супермногообразий

1. Основные инварианты. Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ — супермногообразие, дифференцируемое или аналитическое, $J_M = \mathcal{O}_{M,1} + \mathcal{O}^2_{M,1}$, $\mathcal{F} = J_M/J^2_M$. Пусть $\dim M = m|n$; мы рассматривает $\mathcal{F}$ как локально свободный пучок ранга $0|n$ на $M_{\text{rd}} = (M, \mathcal{O}_{M_{\text{rd}}})$, где $\mathcal{O}_{M_{\text{rd}}} = \text{Gr}_0\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_M/J_M$. Последовательные факторы фильтрации структурного пучка идеалами $\mathcal{O}_M \supset J_M \supset J^2_M \supset \ldots \supset J^{n+1}_M = \{0\}$ суть $\text{Gr}_i\mathcal{O}_M = S^i(\mathcal{F})$ (симметрические степени над $\mathcal{O}_{M_{\text{rd}}}$), причем локально по M, по определению, пучки $\mathcal{O}_M$ и $\text{Gr}\,\mathcal{O}_M$ изоморфны. Поэтому отличие $\mathcal{O}_M$ от $\text{Gr}\,\mathcal{O}_M$ глобально связано с некоторыми когомологическими инвариантами. При $n > 1$, однако, соответствующий пучок коэффициентов является пучком некоммутативных групп. Он имеет последовательность нормальных делителей с коммутативными факторами, и цель этого параграфа — ввести простейшие «характеристические классы», отличающие M от $\mathrm{Gr}\, M$. Они могут быть нетривиальными лишь в аналитическом случае, тогда как в дифференцируемом обращаются в нуль:

2. **Теорема.** *Любое дифференцируемое супермногообразие M изоморфно (не канонически) $\mathrm{Gr}\, M$.*

Доказательство использует следующий факт.

3. **Лемма.** *Любой локально свободный пучок $\mathscr{E}$ на дифференцируемом супермногообразии M является тонким. Поэтому $H^q(M, \mathscr{E}) = 0$ при $q \geqslant 1$.* ■

Лемма сразу следует из существования разбиения единицы так же, как и в случае обычных дифференцируемых многообразий. Чтобы установить теорему 2, нам нужен будет только этот последний случай, который хорошо известен.

Супермногообразие $\mathrm{Gr}\, M$ допускает проекцию $\mathrm{Gr}\, M \to M_{\mathrm{rd}}$, тождественную на $M_{\mathrm{rd}} \subset \mathrm{Gr}\, M$, которая отвечает паре $(\mathrm{id}_M,\ \mathrm{Gr}_0\, \mathcal{O}_M \hookrightarrow \mathrm{Gr}\, \mathcal{O}_M)$. Следующая лемма показывает, что когомологические препятствия к существованию такой проекции $M \to M_{\mathrm{rd}}$ в дифференцируемом случае отсутствуют.

4. **Лемма.** *Существует морфизм φ: $M \to M_{\mathrm{rd}}$, тождественный на M_{rd}.*

Доказательство. Как в § 1, положим $M^{(i)} = (M, \mathcal{O}_M/J_M^{i+1})$; $M^{(i)} \subset M^{(i+1)}$ (замкнутое вложение). Положим $\varphi^{(0)} = \mathrm{id}$: $M^{(0)} = M_{\mathrm{rd}} \to M_{\mathrm{rd}}$ и будем строить индукцией по i отображения $\varphi^{(i+1)}$: $M^{(i+1)} \to M_{\mathrm{rd}}$ такие, что $\varphi^{(i+1)}$ есть продолжение $\varphi^{(i)}$. Существенный момент — конструкция препятствия

$$\omega(\varphi^{(i)}) \in H^1(M_{\mathrm{rd}},\ (\mathscr{T} M_{\mathrm{rd}} \otimes S^{i+1}(\mathscr{F}))_0)$$

такого, что если $\omega(\varphi^{(i)}) = 0$, то $\varphi^{(i+1)}$ существует. По лемме 3 в дифференцируемом случае $\omega(\varphi^{(i)}) = 0$.

Построим локально конечное покрытие M, над элементами U которого $\varphi^{(i)}$ продолжается до $\varphi_U^{(i+1)}$. Представим $\varphi_U^{(i+1)}$ вложениями колец функций: $\varphi_U^{(i+1)}: \mathcal{O}(U_{\mathrm{id}}) \to \mathcal{O}(U^{(i+1)})$, такими, что их редукция mod J_M^{i+1} совпадает с ограничением $\varphi^{(i)}$ на U. Положим

$$\omega_{UV} = \varphi_V^{(i+1)}|_{U\cap V} - \varphi_U^{(i+1)}|_{U\cap V}:$$
$$\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}(U \cap V) \to \Gamma(U \cap V,\ S^{i+1}(\mathscr{F})).$$

Нетрудно видеть, что ω_{UV} является четным дифференцированием кольца $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}(U\cap V)$ и потому может быть отождествлено с сечением пучка $(\mathcal{T}M_{\mathrm{rd}}\otimes S^{i+1}(\mathcal{F}))_0$. Набор сечений (ω_{UV}) образует коцикл Чеха. Смена выборов продолжений $\varphi_U^{(i+1)}$ меняет его на кограницу; наоборот, любое добавление кограницы может быть получено таким способом. Поэтому существование согласованной системы $\left(\varphi_U^{(i+1)}\right)$ равносильно обращению в нуль класса когомологий (ω_{UV}). ■

5. **Доказательство теоремы 2.** Фиксируем морфизм $\varphi\colon M\to M_{\mathrm{rd}}$, как в лемме 4, и отвечающее ему вложение $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}\subset M$. Если $\dim M = m|n$, то $\mathcal{O}_M$ как $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$-модуль локально свободен ранга $2^{n-1}|2^{n-1}$ и допускает фильтрацию $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$-подмодулями J_M^i, которые тоже локально свободны и локально прямо вложены. В дифференцируемой категории любое расширение локально свободных модулей расщепляется, поскольку препятствием к расщеплению $0\to\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}_2\to 0$ является некоторый класс когомологий в группе $H^1(M, \mathcal{H}om_0(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1))$. Поэтому, в частности, фактормодуль $\mathcal{O}_M^{(1)} = \mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}\oplus\mathcal{F}$ можно вложить в $\mathcal{O}_M$ как $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$-подмодуль. Отождествим $\mathcal{O}_M^{(1)}$ с его образом при этом вложении. Оно продолжается до гомоморфизма $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$-алгебр $\psi\colon S(\mathcal{F})\to\mathcal{O}_M$ в силу универсального свойства симметрической алгебры. На ассоциированных градуированных объектах (по степени $(\mathcal{F})$ — в первом пучке, по степеням J_M — во втором) этот гомоморфизм является изоморфизмом. Поэтому ψ — изоморфизм. ■

6. **Теорема.** *Пусть M — дифференцируемое супермногообразие, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на нем, $\mathcal{E}_{\mathrm{rd}}$ — его ограничение на M_{rd}, $\varphi\colon M\to M_{\mathrm{rd}}$ — проекция, как в лемме 4. Тогда $\mathcal{E}$ изоморфен (неканонически) пучку $\varphi^*(\mathcal{E}_{\mathrm{rd}})$, $\mathcal{E}_{\mathrm{rd}} = \mathrm{Gr}_0\,\mathcal{E}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi^{(i)}$ — ограничение φ на $M^{(i)}$. Индукцией по i построим изоморфизмы $\psi^{(i)}\colon \mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}\otimes\mathcal{O}_{M(i)}\to\varphi^{(i)*}(\mathcal{E}_{\mathrm{rd}})$, начиная с $\psi^{(0)} = \mathrm{id}$. Препятствием к существованию продолжения $\psi^{(i)}$ до $\psi^{(i+1)}$ служит класс когомологий

$$\omega(\psi^{(i)})\in H^1(M_{\mathrm{rd}}, (\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{\mathrm{rd}}\otimes S^{i+1}(\mathcal{F}))_0).$$

Строится он совершенно так же, как в доказательстве леммы 4. Над элементами U покрытия, расщепляющего $\mathcal{E}$ и M, выбираются продолжения $\psi_U^{(i+1)}\colon \mathcal{E}\otimes\mathcal{O}_{M(i+1)}|_U\to$

$\to \mathcal{E}_{\mathrm{rd}} \underset{\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}}{\otimes} \mathcal{O}_{M^{(i+1)}}|_U$ изоморфизма $\psi_U^{(i)}$. Два таких продолжения $\psi_U^{(i+1)}$ и $\psi_V^{(i+1)}$ на $U \cap V$ не отличаются по модулю $\mathcal{E} \otimes \otimes J_M^{i+1}$, что позволяет характеризовать их рассогласование с помощью коцикла

$$\omega_{UV}\colon \mathcal{E}_{\mathrm{rd}}|_{U\cap V} \to \mathcal{E}_{\mathrm{rd}} \otimes S^{i+1}(\mathcal{F})|_{U\cap V}.$$

Остальные детали мы опускаем. ■

7. Следствие. *Следующие две задачи классификации сводятся к задаче классификации дифференцируемых векторных расслоений на* M_{rd}.

а) *Классификация с точностью до изоморфизма всех дифференцируемых суперрасширений* M_{rd} *(т. е. супермногообразий* M *с данным* M_{rd}*).*

б) *Классификация локально свободных пучков на этих суперрасширениях.* ■

Тем не менее супергеометрия, даже дифференцируемая, не допускает никакого тривиального сведения к чисто четной геометрии из-за того, что в суперкатегории много больше морфизмов $M \to N$, чем морфизмов пар $(M_{\mathrm{rd}}, \mathcal{F}_M) \to \to (N_{\mathrm{rd}}, \mathcal{F}_N)$ из-за возможности «замен переменных, нелинейных по нечетным координатам».

Обратимся теперь к аналитическим супермногообразиям, где все когомологические препятствия могут быть ненулевыми. В доказательствах мы вкратце напоминаем фрагменты формализма теории препятствий из гл. 2.

8. Предложение. *Пусть* $(M, \mathcal{O}_M)$ — *аналитическое супермногообразие нечетной размерности* 1.

а) $(M, \mathcal{O}_M)$ *с точностью до изоморфизма определяется парой* $(M_{\mathrm{rd}}, \mathcal{F})$.

б) *Локально свободный пучок* $\mathcal{E}$ *на* $(M, \mathcal{O}_M)$ *с точностью до изоморфизма определяется парой, состоящей из пучка* $\mathcal{E}_{\mathrm{rd}}$ *и класса когомологий* $\omega \in H^1(M_{\mathrm{rd}}, (\mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{\mathrm{rd}} \otimes \mathcal{F})_0)$; ω *может быть любым.*

Доказательство. Так как $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} = 0|1$, имеем $\mathcal{O}_{M,0} = \mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$, $J_M = \mathcal{O}_{M,1} = \mathcal{F}$; умножение в $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}} \oplus \mathcal{F}$ однозначно определяется действием $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$ на $\mathcal{F}$, поскольку $\mathcal{F}$ — идеал с квадратом нуль. Это доказывает первое утверждение.

В частности, $\mathcal{O}_M$-модуль $\mathcal{E}$ является $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$-модулем и в качестве такого представляется в виде расширения локально свободных модулей $0 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}_{\mathrm{rd}} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{\mathrm{rd}} \to 0$. Обозначим через ω класс этого расширения. Зная ω, мы знаем $\mathcal{E}$ с точностью до изоморфизма, фильтрацию $J_M\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ и отождествление $\mathcal{E}/J_M\mathcal{E}$ с $\mathcal{E}_{\rm rd}$. Этого достаточно, чтобы восстановить на $\mathcal{E}$ структуру $\mathcal{O}_M$-модуля, поскольку ясно, как доопределить умножение на J_M. ■

9. Предложение. *Пусть* $(M, \mathcal{O}_M)$ — *аналитическое супермногообразие нечетной размерности* 2.

а) $(M, \mathcal{O}_M)$ *с точностью до изоморфизма определяется парой* $(M_{\rm rd}, \mathcal{F})$ *и классом когомологий* $\omega_M \in H^1(M_{\rm rd}, \mathcal{T}M_{\rm rd} \otimes \otimes S^2(\mathcal{F}))$; *класс* ω_M *может быть любым.*

б) *Локально свободный пучок* $\mathcal{E}$ *на* $(M, \mathcal{O}_M)$ *ранга* $p|0$ *с точностью до изоморфизма определяется парой, состоящей из пучка* $\mathcal{E}_{\rm rd}$ *и класса когомологий* $\omega_{\mathcal{E}} \in H^1(M_{\rm rd}, \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}_{\rm rd} \otimes S^2\mathcal{F})$; *этот класс может быть любым. Чтобы определить* $\omega_{\mathcal{E}}$ *однозначно, нужно фиксировать один пучок* $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'_{\rm rd} = \mathcal{E}_{\rm rd}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{rk}\mathcal{F} = 0|2$, имеем $\mathcal{O}_{M,1} = \mathcal{F}$, а $\mathcal{O}_{M,0}$ есть расширение $\mathcal{O}_{M_{\rm rd}}$ с помощью идеала с нулевым квадратом $S^2(\mathcal{F})$. Класс ω_M строится как препятствие к конструкции вложения $\mathcal{O}_{M_{\rm rd}} \to \mathcal{O}_{M,0}$, т. е. к расщеплению этого расширения, как в доказательстве леммы 4. Наоборот, по любому классу ω можно построить такое расширение $0 \to S^2(\mathcal{F}) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{M_{\rm rd}} \to 0$, для которого ω есть препятствие к расщеплению. С этой целью на локально конечном покрытии $\{U\}$, расщепляющем ограничения ω на это покрытие, нужно построить пучки $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{U_{\rm rd}} \oplus S^2\mathcal{F}|_U$ и затем склеить их на пересечениях, пользуясь компонентами ω_{UV} коцепи, представляющей ω. Наконец, нетрудно проверить, что два расширения $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, имеющие общее препятствие, изоморфны. Это доказывает утверждение а).

Локально свободный пучок $\mathcal{E}$ на M восстанавливается по $\mathcal{O}_{M_0}$-модулю $\mathcal{E}_0$, потому что $\mathcal{O}_1 = \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{M,0}$ и, значит, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}_0$. Пучок $\mathcal{E}_0$ локально свободен над $\mathcal{O}_{M,0}$, если ранг $\mathcal{E}$ чисто четен, и только в этом случае. Он является продолжением пучка $\mathcal{E}_{\rm rd}$ и определяется классом когомологий расширения $0 \to S^2\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}_{\rm rd} \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_{\rm rd} \to 0$ по отношению к $\mathcal{E}'_0$- «началу отсчета». Этот класс $\omega_{\mathcal{E}}$ есть препятствие к продолжению тождественного изоморфизма $\mathcal{E}_{\rm rd} \to \mathcal{E}'_{\rm rd}$ до изоморфизма $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. ■

10. Примеры. Пусть $M_{\rm rd} = P^m = P(T)$, $T = \mathbf{C}^{m+1}$, $\operatorname{rk}\mathcal{F} = 0|2$. Существует такое k, что $S^2\mathcal{F}$ изоморфен $\mathcal{O}(k)$. По теореме двойственности Серра пространство

$H^1(P^m, \mathcal{T}P^m(k))$ двойственно $H^{m-1}(P^m, \Omega^1P^m(-k-m-1))$. Из теоремы 1.2.2 видно, что эта группа может быть отлична от нуля только при $m=1$, $k\leqslant -4$. Вычисляя ее, получаем следующий список значений k, для которых есть нетривиальные суперрасширения P^1 нечетной размерности 2:

$$S^2(\mathcal{F})=\mathcal{O}(k),\ k\leqslant -4;$$

$$H^1=T\otimes S^{|k|-3}(T)/S^{|k|-2}(T),\ \dim H^1=|k|-3.$$

Чтобы получить полную систему инвариантов таких суперрасширений, учтем еще два обстоятельства. Во-первых, если $S^2(\mathcal{F})=\mathcal{O}(k)$, то $\mathcal{F}=\Pi(\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(b))$, $a+b=k$. Во-вторых, группа $\operatorname{Aut}\mathcal{F}$ действует на H^1, и изоморфные суперрасширения отвечают инвариантам ω, лежащим в одной орбите. Это действие сводится к умножениям на ненулевые комплексные числа. Окончательно, следующий список суперпространств исчерпывает те P, для которых $P_{\mathrm{rd}}=P^1$, $\operatorname{rk}\mathcal{F}_{-}=0|2$ и $P\not\simeq \operatorname{Gr}P$:

$$P_{\omega}^{1/2}(a,b):\ a+b\leqslant -4,$$

$$\omega\in P(H^1(P^1,\mathcal{O}(a+b+2))=P^{|a+b|-4},$$

$$\operatorname{Cr}P_{\omega}^{1/2}=(P^1,\Lambda(\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(b))).$$

В случае $a+b=-4$ — непрерывных параметров нет.

б) На $P=\left(P^1,\mathcal{O}_{P^1}\oplus\Pi\,\mathcal{O}(k)\right)$ рассмотрим локально свободные пучки $\mathcal{E}$, для которых $\mathcal{E}_{\mathrm{rd}}=\bigoplus\limits_i \Pi^{\varepsilon_i}\mathcal{O}(a_i)$, $\varepsilon_i=0,1$. В силу предложения 8 они классифицируются классами когомологий из

$$H^1\left(P^1,\bigoplus_{\varepsilon_i+\varepsilon_j+1=0}\mathcal{O}(a_i-a_j+k)\right).$$

в) На $P=(P^1,\Lambda(\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(b)))$ рассмотрим локально свободные пучки $\mathcal{E}$, для которых $\mathcal{E}_{\mathrm{rd}}=\bigoplus\limits_i\mathcal{O}(a_i)$. В силу предложения 9 они классифицируются элементами группы когомологий $H^1\left(P^1,\bigoplus\limits_{i,j}\mathcal{O}(a_i-a_j+a+b)\right)$. В качестве начала отсчета можно канонически выбрать $\varphi^*(\mathcal{E}_{\mathrm{rd}})$, где $\varphi\colon P\to P_{\mathrm{rd}}$ стандартная проекция.

§ 3. Суперграссманианы и суперпространства флагов

1. В этом параграфе мы строим важные примеры суперпространств, которые в суперсимметрии играют такую же фундаментальную роль, как и в чисто четной геометрии.

Начнем с грассманианов. Большинство конструкций параллельно соответствующим построениям § 1 гл. 1, и этот параллелизм сохранен в обозначениях.

2. Исходные данные. Пусть A — суперкоммутативное кольцо, T — свободный A-модуль ранга $d+c$, где $d=d_0|d_1$, $c=c_0|c_1$. Следует представлять себе, что A есть кольцо функций на суперпространстве M в одной из стандартных геометрических категорий: на суперсхеме $\operatorname{Spec} A$, либо на дифференцируемом супермногообразии, либо на аналитическом штейновом суперпространстве, а T — модуль сечений тривиального расслоения $\mathcal{T}$ над M.

«Относительный грассманиан» $G_A(d;\ T)$ (или $G_M(d;\ \mathcal{T})$) будет описан набором полиномиальных A-алгебр и правил замены координат «на пересечениях их спектров». Мы вкратце поясним достаточно очевидное построение соответствующего суперпространства в одной из категорий.

3. Стандартный атлас и координаты. Выберем в T базис стандартного формата: $T=A^{d_0+c_0}\oplus(\Pi A)^{d_1+c_1}$. Элементы T будем описывать строками их левых координат в этом базисе; аналогично, такие строки с элементами в A-алгебре B будем интерпретировать как элементы модуля $B\underset{A}{\otimes} T$.

Пусть $I=I_0\cup I_1$ — множество из $d_0|d_1$ (индексов) элементов отмеченного базиса T.

а) Каждому множеству I поставим в соответствие свободный набор четных x_I^{ab} и нечетных ξ_I^{ab} переменных, заполняющих в матрице стандартного формата $d_0|d_1\times(d_0+c_0)|$ $|(d_1+c_1)$ все места, кроме столбцов с номерами I, которые в совокупности образуют единичную матрицу:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & c_0 & d_0 & d_1 & c_1 \\ \hline
d_0 & x_I & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & \xi_I \\ \hline
d_1 & \xi_I & 0 & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & x_I \\ \hline
 & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hspace{10em}}_{I}} &
\end{array}$$

Обозначим далее через U_I одно из следующих суперпространств.

В категории суперсхем $U_I = \operatorname{Spec} A[x_I, \xi_I] \xrightarrow{\pi} M = \operatorname{Spec} A$, π индуцировано стандартным вложением колец $A \to A[x_I, \xi_I]$. Очевидно, $U_I = M \times \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[x_I, \xi_I]$.

В категории дифференцируемых супермногообразий $U_I \xrightarrow{\pi} M$ — супермногообразие $M \times \mathbf{R}^{c_0d_0\times c_1d_0|c_1d_0\times d_0c_1}$, у которого x_I, ξ_I — гладкие координаты вдоль слоя.

В категории аналитических суперпространств $U_I \xrightarrow{\pi} M$ — аналитическое суперпространство $M \times \mathbf{C}^{c_0d_0\times c_1d_1\,|\,c_1d_0+d_0c_1}$, у которого x_I, ξ_I — комплексные координаты вдоль слоя.

б) Пусть теперь I, J — два множества базисных элементов T мощности $d_0|d_1$. Обозначим через B_{IJ} подматрицу Z_I, образованную столбцами с номерами J. Обозначим через $U_{IJ} \subset U_I$ максимальное открытое подсуперпространство, на котором B_{IJ} как матрица функций обратима. Для этого, конечно, достаточно обратимости двух четных функций — определителя левой верхней подматрицы размера $d_0 \times d_0$ и правой нижней размера $d_1 \times d_1$. Структура матрицы Z_I показывает, что во всех трех случаях $U_{IJ} = M \times V_{IJ}$, где V_{IJ} — плотное открытое подпространство в соответствующем слое проекции.

в) На суперпространствах U_{IJ} и U_{JI} имеются общие функции — элементы A, и две системы координат «над A»: (x_I, ξ_I) и (x_J, ξ_J). Правило замены координат определим следующими уравнениями склейки:

$$Z_J = B_{IJ}^{-1} Z_I \quad \text{на} \quad U_{IJ}.$$

Очевидно, (x_J, ξ_J) выражаются в виде рациональных функций от (x_I, ξ_I) с целыми коэффициентами и обратимым (на U_{IJ}) знаменателем. Поэтому эти функции перехода принадлежат структурным пучкам любой из трех рассматриваемых категорий.

2) Положим $G_M(d; \mathcal{T}, (t)) = \left(\bigcup_I U_I\right)\Big/R$, где R — отношение эквивалентности, порожденное описанными заменами координат, а (t) — исходный базис T.

Канонические отображения $U_I \to G_M(d; \mathcal{T})$ являются изоморфизмами с открытыми подсуперпространствами грассманиана. Это — «большие клетки» суперграссманианов. Из конструкции очевидно, что наши относительные грассманияны получаются заменой базы $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, $\mathbf{R}^{1|0}$ или $\mathbf{C}^{1|0}$ на M из соответствующего абсолютного грассманиана в каждой из трех категорий.

д) Пусть теперь $t' = H(t)$ — новый базис T, H — матрица его замены. Если элемент описывался строкой левых координат (x, ξ) в старом базисе, то $(x', \xi') = (x, \xi)H^{-1}$ — его новые координаты. Поэтому мы отождествим $G_M(d;\ \mathcal{T},\ (t))$ и $G_M(d;\ \mathcal{T},\ (t'))$ с помощью следующих правил замены координат.

Обозначим через B'_{IJ} матрицу, состоящую из столбцов с номерами J в $Z_I H^{-1}$, а через Z'_J — матрицу, отвечающую клетке U'_J в стандартном атласе $G_M(d;\ \mathcal{T},\ (t'))$. На открытом подмножестве U_I, где B'_{IJ} обратима, переход к штрихованным координатам происходит по формуле

$$(B'_{IJ})^{-1} Z_I H^{-1} = Z'_J.$$

Серия прямолинейных проверок показывает, что так определяется изоморфизм суперпространств над A: φ_H: $G_M(d;\ \mathcal{T};\ (t)) \to G_M(d;\ \mathcal{T};\ (t'))$, причем $\varphi_{H_1 H_2} = \varphi_{H_1}\varphi_{H_2}$, так что определено левое действие группы $\mathrm{GL}(d+c;\ A)$ на $G_M(d;\ \mathcal{T};\ (t))$.

Будем обозначать через $G_M(d;\ \mathcal{T})$ суперпространство, представленное этими канонически изоморфными объектами. Мы построили его вместе с действием $\mathrm{GL}(\mathcal{T})$ — эта группа автоморфизмов (четных) A-модуля $\mathcal{T}$ представлена поразному матричными группами $\mathrm{GL}(d+c;\ A)$ при разных выборах базиса $\mathcal{T}$. Это и есть грассманиан.

Относительная (над M) размерность грассманиана равна dc: произведению ранга d на коранг $\operatorname{rk}\mathcal{T} - d$ тех подмодулей $\mathcal{T}$, которые точки грассманиана классифицируют (см. ниже, п. 9).

В частности, особый интерес представляют грассманианы чисто нечетной относительной размерности: $G(d|0,\ A^{d|c})$ и $G(0|c,\ A^{d|c})$.

4. Пример: проективные суперпространства. Положим $P_A(T) = P_A^{m|n} = G_A(1\,|\,0;\ A^{m+1|n})$. Здесь $I = \{i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $Z_{\{i\}} = \left(x^k_{\{i\}},\ \ k \neq i,\ \ 1 \leqslant k \leqslant m+1\,|\,\xi^l_{\{i\}},\ \ k = 1, \ldots, n\right)$; правила перехода: $x^k_{\{j\}} = \left(x^j_{\{i\}}\right)^{-1} x^k_{\{i\}}$, $\xi^l_{\{j\}} = \left(x^j_{\{i\}}\right)^{-1} \xi^l_{\{i\}}$. Как и в чисто четном случае, эти правила перехода удобнее всего описать, введя на $P_A(T)$ однородные координаты (над A) $(x^1 : \ldots : x^{m+1}\,|\,\xi^1 : \ldots : \xi^n)$ и положив $x^k_{\{j\}} = \left(x^j\right)^{-1} x^k$, $\xi^l_{\{j\}} =$

$=(x^j)^{-1}\xi^l$. Структура проективного суперпространства весьма проста. Положим $A=\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ («точка» в соответствующей категории), $T=T_0\oplus T_1$ — свободный A-модуль ранга $m+1|n$.

5. Предложение. *$P^{m|n}=P_A(T)$ является гладким супермногообразием размерности $m|n$, которое канонически изоморфно* $\mathrm{Gr}\,P^{m|n}$:

$$P^{m|n}=\mathrm{Gr}\,P^{m|n}=\left(P\left(T_0\right),\ S\left(T_1^*\otimes\mathcal{O}_{P(T_0)}(-1)\right)\right).$$

Доказательство. Изоморфизм $P\left(T\right)_{\mathrm{rd}}\xrightarrow{(\varphi,\psi)}P\left(T_0\right)$ строится очевидным образом на стандартном покрытии $P(T_0)=\cup\, U_{\{i\}}$ с координатами $\left(x^j_{\{i\}}\,|\,j\neq i\right)$. Изоморфизм пучков ψ: $S\left(T_1^*\otimes\mathcal{O}\left(-1\right)\right)\to\mathcal{O}_{P^{m|n}}$ индуцирован отображением $\psi\left(\xi^l\otimes\left(x^j\right)^{-1}\right)=\xi^l_{\{j\}}$, где ξ^l рассматривается как элемент T_1^*, $\left(x^j\right)^{-1}$ — как сечение $\mathcal{O}_{P(T_0)}\left(-1\right)$ над $U_{\{j\}}$. ■

6. **Тавтологический пучок.** Вернемся к общим суперграссманианам над A. Обозначим через S_I свободный $\mathcal{O}(U_I)$-модуль ранга $d_0|d_1$, порожденный строками матрицы Z_I. (Он свободен, ибо столбцы I образуют единичную матрицу.) Это модуль сечений свободного пучка $\mathcal{S}_I$. На $U_{IJ}=U_{JI}$ ограничения $\mathcal{S}_I|U_{IJ}$ и $\mathcal{S}_J|U_{JI}$ отождествляются с помощью той же матрицы перехода B_{IJ}, которая использовалась для построения функций перехода. Это позволяет определить локально свободный пучок $\mathcal{S}$ на $G_A(d;\ T)=G$, который мы называем тавтологическим. Он определен вместе с каноническим локально прямым вложением $\mathcal{S}\to\mathcal{O}_G\underset{A}{\otimes}T$: строке матрицы Z_I ставится в соответствие то сечение из $\Gamma(U_I,\ \mathcal{O}_G\otimes T)$, которое эта строка изображает.

7. **Функториальность.** Суперграссманиан $G_A(d;\ T)$ обладает очевидными свойствами функториальности по A и по T.

а) $G_B\left(d;\ B\underset{A}{\otimes}T\right)$ канонически отождествляется с $B\underset{A}{\otimes}$ $\underset{A}{\otimes}G_A\left(d;\ T\right)$ для любой A-алгебры B. Эта формулировка приспособлена к категории суперсхем. В категории супермногообразий соответствующий факт без труда сформулирует читатель.

б) Любой изоморфизм A-модулей f: $T\to T'$ индуцирует изоморфизм $G_A(d;\ T)\to G_A(d;\ T')$. Точнее говоря, мы определили $G_A(d;\ T)$ вместе с классом выделенных моделей, отвечающих базисам T. Это позволяет очевидным образом построить изоморфизмы $G_A(f)$: $G_A(d;\ T;\ (t)) \to G_A(d;\ T';\ (f(t)))$. После этого проверка совместимости с изоморфизмами между моделями сводится к проверке корректности изоморфизмов замены базы, о которых мы кратко говорили в п. 3, д).

в) Относительно отождествлений, описанных в а) и б), тавтологические пучки переходят друг в друга.

8. Общие относительные грассманианы. Пусть теперь M — суперсхема, либо дифференцируемое супермногообразие, либо аналитическое суперпространство. Для любого локально свободного пучка J ранга $d+c$ на M можно построить суперпространство $G = G_M(d;\ \mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} M$ вместе с канонической проекцией на M, лежащее в той же категории, что и M. Это суперпространство определено вместе с набором стандартных атласов. Один стандартный атлас на G определяется парой, состоящей из: а) атласа $M = \cup V_i$, состоящего из аффинных открытых подсхем, суперобластей либо штейновых открытых аналитических подпространств, над которыми $\mathcal{T}$ тривиализируется; б) набора тривиализаций $\mathcal{T} \mid V_i$ над картами этого атласа.

Если такая пара задана, положим $A_i = \mathcal{O}(V_i)$, $T_i = \mathcal{T}(V_i) = T(V_i,\ \mathcal{T})$ и склеим $G_M(d;\ \mathcal{T})$ из $G_{A_i}(d;\ T_i)$, пользуясь функториальными свойствами из п. 7 для канонического отождествления $\pi_i^{-1}(V_{ij})$ с $\pi_j^{-1}(V_{ij})$, где π_i: $G_{A_i}(d;\ \mathcal{T}_i) \to V_i$ — структурные морфизмы, $V_{ij} = V_i \cap V_j$.

Вместе с $G_M(d;\ \mathcal{T})$ строится тавтологический локально прямой подпучок $\mathcal{S} \subset \pi^*(\mathcal{T})$ ранга d, склеенный из $\mathcal{S}_i$ на $G_A(d;\ \mathcal{T}_i)$ в силу п. 7, в).

9. N-точки грассманиана. Пусть φ: $N \to M$ — морфизм суперпространств в одной из трех категорий. Любому его подъему до морфизма χ: $N \to G_M(d;\ \mathcal{T})$ (т. е. такому χ, что $\pi \circ \chi = \varphi$) поставим в соответствие прообраз тавтологического пучка $\chi^*(\mathcal{S}_M)$, который реализован в качестве локально прямого подпучка $\chi^*(\mathcal{S}_M) \subset \varphi^*(\mathcal{T})$ ранга d. Мы получаем следующее отображение множеств:

$$\{N\text{-точки } G_M(d;\ \mathcal{T}) = \mathrm{Hom}_M(N,\ G_M(d;\ \mathcal{T}))\} \to$$
$$\to \{\text{локально прямые подпучки ранга } d \text{ в } \varphi^*(\mathcal{T})\}.$$

Фиксируем здесь M, $\mathcal{T}$, d. При переменном $(N,\ \varphi)$, пробегающем суперпространства над M в одной из трех категорий, наборы множеств слева и справа продолжаются до функтора от (N, φ), а отображения между ними — до морфизма функторов.

10. Теорема. *Описанный морфизм функторов в каждой из трех категорий является изоморфизмом.*

Доказательство ничем не отличается от соответствующего рассуждения в чисто четной категории, фрагменты которого приведены в § 1 гл. 1. Кроме прямолинейных проверок всех определений, это доказательство опирается на один простой алгебраический факт: если строки матрицы стандартного формата размера $d\times(d+c)$ порождают прямой подмодуль в A^{d+c} ранга d, то у нее есть обратимая подматрица размера $d\times d$ (обратное очевидно). Отсюда вытекает, что атлас (U_I) действительно покрывает все N-точки грассманиана. ■

11. Теорема. *Пусть $\mathcal{T}G_M/M$ — относительный касательный пучок к грассманиану $G_M(d;\ \mathcal{T})$, $\tilde{\mathcal{S}}\subset\pi^*(\mathcal{T}^*)$ — пучок, ортогональный к тавтологическому. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$\mathcal{T}G_M/M=\mathcal{H}om\,(\mathcal{S},\ \pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S})=\tilde{\mathcal{S}}^*\otimes\mathcal{S}^*.$$

Доказательство. Достаточно снова повторить рассуждения § 1 гл. 1. Пусть X — локальное вертикальное поле на G_M (аннулирующее $\pi^*(\mathcal{O}_M)$). Имеется естественное действие X на $\pi^*(\mathcal{T})$, аннулирующее все сечения $\pi^{-1}(\mathcal{T})$. Ограничивая его на $\mathcal{S}$ и затем редуцируя результат по модулю $\mathcal{S}$, получаем в силу формулы Лейбница $\mathcal{O}_M$-линейное отображение

$$\mathcal{T}G_M/M\to\mathcal{H}om\ (\mathcal{S},\ \pi^*\,(\mathcal{T})/\mathcal{S})\colon\ X\mapsto\bar{X},\quad \bar{X}s=\bar{X}s\,\mathrm{mod}\ \mathcal{S}.$$

На открытой большой клетке типа U_I оно является изоморфизмом. В самом деле, пусть $(y_I)=(x_I,\ \xi_I)$. Тогда $\mathcal{T}U_I/A$ свободно порожден полями $\dfrac{\partial}{\partial y_I^{ab}}$; если считать, что a, b нумеруют строки и столбцы матрицы Z_I, то y_I^{ab} являются независимыми переменными при $b\notin I$. Базис сечений $\mathcal{S}$, выраженный через фиксированный базис (t_b) A-модуля T, над U_I имеет вид $s^a=\sum\limits_{b\notin I}y_I^{ab}\otimes t_b+t_{I(a)}$, где $I(a)$ — место, на котором в a-й строке матрицы Z_I стоит единица. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial y_I^{ab}}\,s^c\equiv\delta_a^c t_b\,\mathrm{mod}\ \mathcal{S},\qquad b\notin I.$$

Наконец, $t_b\,\mathrm{mod}\,\mathcal{S}$ образуют базис сечений $\pi^*(\mathcal{T})\,\mathrm{mod}\,\mathcal{S}$ над

U_I при $b \notin I$, поскольку t_c для $c \in I$ можно выразить через t_b, $b \in I$, и строки Z_I. Следовательно, линейные отображения $\overline{\partial/\partial y^{\prime b}}$ свободно порождают $\mathscr{H}om\,(\mathscr{S}|U_I,\ \pi^*(\mathscr{T})^I/\mathscr{S}|U_I)$. ■

12. Пример. На проективном суперпространстве $P = P_M(\mathscr{T}) = G_M(1|0;\ \mathscr{T})$ тавтологический пучок будем обозначать, как обычно, $\mathscr{O}(-1)$. Пользуясь теоремой 11, получаем точные последовательности

$$0 \to \mathscr{O}\,(-1) \to \pi^*\,(\mathscr{T}) \to \mathscr{T}P/M\,(-1) \to 0,$$

$$0 \to \Omega^1_{\text{odd}}P/M\,(1) \to \pi^*\,(\Pi\mathscr{T}^*) \to \Pi\mathscr{O}\,(1) \to 0,$$

используемые так же, как в § 2 гл. 1. Вычислим, например, $\text{Ber}\,P/M = \left(\text{Ber}\,\Omega^1_{\text{odd}}P/M\right)^*$; пусть $\text{rk}\,\mathscr{T} = m + 1|n$.

13. Предложение.

$$\text{Ber}\,P/M = \Pi^{m+n}\,\text{Ber}\,(\pi^*(\mathscr{T}^*))(-m-1+n).$$

Доказательство. Для любой точной тройки локально свободных пучков на суперпространстве $0 \to \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}_2 \to 0$ можно определить канонический изоморфизм f: $\text{Ber}\,\mathscr{S}_1 \otimes \text{Ber}\,\mathscr{S}_2 \to \text{Ber}\,\mathscr{S}$. Именно, пусть $(s_{1i},\ s_{2j})$ — такой локальный базис $\mathscr{S}$, что (s_{1i}) — локальный базис $\mathscr{S}_1$, а $(s_{2j}\,\text{mod}\,\mathscr{S}_1)$ — локальный базис $\mathscr{S}_2$. Изоморфизм f определяется тем, что

$$f\,(D\,(s_{1i}) \otimes D\,(s_{2j}\,\text{mod}\,\mathscr{S}_1)) = (-1)^{\tilde{a}}\,D\,(a\,(s_{1i},\,s_{2j})),$$

где (s_{1i}) и (s_{2j}) стандартно упорядочены, a — перестановка, стандартно упорядочивающая объединенный базис. Корректность этого проверяется без труда. Поэтому

$$\text{Ber}\left(\Omega^1_{\text{odd}}P/M\right)(n-m) \otimes \Pi\mathscr{O}\,(-1) = \text{Ber}\,(\pi^*\,(\Pi\mathscr{T}^*)).$$

Отсюда следует требуемое с учетом изоморфизма $\text{Ber}\,(\Pi\mathscr{S}^*) = \Pi^{\text{rk}\,\mathscr{S}}\ \text{Ber}\,\mathscr{S}$. ■

Отсюда, в частности, следует, что при $m + 1 = n$ относительный березиниан $\text{Ber}\,P/M$ изоморфен пучку, поднятому с M; когда M — точка, он тривиален.

Для общих грассманианов аналогом предложения 5 является результат, вычисляющий ассоциированное градуированное пространство. Начнем с простого технического утверждения, которое позволяет понять структуру этого пространства, если известна структура суперкасательного пучка.

14. Предложение. *Пусть M — дифференцируемое или аналитическое супермногообразие, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на M. Тогда существуют следующие изоморфизмы:*

а) $\mathrm{Gr}_i\,\mathscr{E} = \mathrm{Gr}_0\,\mathscr{E} \otimes S^i(\mathrm{Gr}_1\,\mathcal{O}_M)$ *(над* $\mathrm{Gr}_0\,\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$*).*

б) $\mathrm{Gr}_1\,\mathcal{O}_M = (\mathrm{Gr}_0\,\Omega^1_{\mathrm{ev}}M)_1$, *где внешний индекс относится к* $\mathbf{Z}_2$*-градуировке.*

Доказательство. Пусть (x^a, ξ^b) — локальная система координат на M, (e^c) — локальный базис сечений $\mathscr{E}$. Тогда $\mathrm{Gr}_i\,\mathscr{E} = \mathscr{E}\,J^i_M/\mathscr{E}\,J^{i+1}_M$ локально свободно порожден классами $\{e^c\xi^\alpha \bmod \mathscr{E}\,J^{i+1}_M \,|\, |\alpha| = i\}$ над $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$, а $\mathrm{Gr}_1\,\mathcal{O}_M$ свободно порожден классами $\{\xi^b \bmod J^2_M\}$. Первый изоморфизм в предложении переводит $e^c(\xi^1)^{\alpha_1}\dots(\xi^n)^{\alpha_n}$ в $(e^c \bmod \mathscr{E}J_M) \otimes \otimes (\xi^1 \bmod J^2_M)^{\alpha_1}\dots(\xi^n \bmod J^2_M)^{\alpha_n}$. Корректность проверяется легко (учесть, что M — супермногообразие, т. е. $\mathcal{O}_M$ локально изоморфно $\mathrm{Gr}\,\mathcal{O}_M$).

Второй изоморфизм переводит $\xi^b \bmod J^2_M$ в $d_{\mathrm{ev}}\xi^b \bmod J_M\Omega^1_{\mathrm{ev}}M$. Чтобы проверить корректность определения, убедимся, что для любой системы координат (y, η) сечения $\eta^c \bmod J^2_M$ переходят в $d_{\mathrm{ev}}\eta^c \bmod J_M\Omega^1_{\mathrm{ev}}M$. В самом деле, пусть $\eta^c \equiv \sum\limits_b f^c_b(x)\,\xi^b \bmod J^2_M$. Тогда

$$d_{\mathrm{ev}}\eta^c = \sum_a d_{\mathrm{ev}}x^a \frac{\partial\eta^c}{\partial x^a} + \sum_b d_{\mathrm{ev}}\xi^b \frac{\partial\eta^c}{\partial\xi^b} \equiv$$

$$\equiv \sum_b d_{\mathrm{ev}}\xi^b f^c_b(x) \bmod J_M\Omega^1_{\mathrm{ev}}M.$$

Это завершает доказательство. ■

Пусть теперь $T = T_0 \oplus T_1$ — линейное суперпространство над $\mathbf{R}$ (в дифференцируемом случае) или над $\mathbf{C}$ (в аналитическом) размерности $d + c = d_0 + c_0|d_1 + c_1$. Положим

$$G = G(d;\ T), \quad G_0 = G(d_0|0;\ T_0), \quad G_1 = G(0|d_1;\ T_1).$$

Суперпространства G_0, G_1 — это обычные чисто четные грассманианы, за исключением того, что тавтологический пучок $\mathscr{S}_{G_1}$ имеет ранг $0|d_1$, а не $d_1|0$. Пусть $\widetilde{\mathscr{S}}_{G_0}$, $\widetilde{\mathscr{S}}_{G_1}$ — пучки, ортогональные к тавтологическим. Следующая теорема дает описание $\mathrm{Gr}\,G$ и, стало быть, G в дифференцируемой категории.

15. Теорема. *Можно определить следующие канонические изоморфизмы.*

а) $G_{\mathrm{rd}} = G_0 \times G_1$.

Обозначим через $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}_1$ *(соответственно* $\widetilde{\mathscr{S}}_0$, $\widetilde{\mathscr{S}}_1$*) пучки* $\mathscr{S}^{G_0}$,

$\mathcal{S}_{G_1}$ *(соответственно* $\widetilde{\mathcal{S}}_{G_0}$, $\widetilde{\mathcal{S}}_{G_1}$*), поднятые на* G_{rd} *относительно проекций.*

б) $\mathrm{Gr}\,\mathcal{O}_G = S(\mathcal{S}_0 \otimes \widetilde{\mathcal{S}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{S}}_0 \otimes \mathcal{S}_1)$ *(симметрическая алгебра над* $\mathcal{O}_{G_{\mathrm{rd}}}$*).*

в) $\mathrm{Gr}\,\mathcal{S}_G = (\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1) \otimes \mathrm{Gr}\,\mathcal{O}_G$ *(над* $\mathcal{O}_{G_{\mathrm{rd}}}$*), где* $\mathcal{S}_G$ *— тавтологический пучок на* G.

Доказательство. Первое утверждение теоремы есть следствие того обстоятельства, что $d_0|d_1$-мерное подпространство в $T_0 \oplus T_1$ разлагается в прямую сумму своей четной и нечетной части. Другие два позволяют понять в инвариантных терминах структуру нечетных координат.

Рассуждая более формально, рассмотрим на $G_0 \times G_1$ пучок $\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{O}_{G_0 \times G_1} \otimes (T_0 \oplus T_1)$. В силу теоремы 10 он индуцирован некоторым морфизмом $\rho\colon G_0 \times G_1 \to G$, т. е. $\rho^*(\mathcal{S}_G) = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1$. Вычисляя в координатах на большой клетке U_I, находим, что ρ отвечает обращению в нуль координат ξ_I, т. е. определяет изоморфизм $G_0 \times G_1$ с G_{rd} и, стало быть, $\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1 = \mathrm{Gr}_0\,\mathcal{S}_G$. Аналогично, $\widetilde{\mathcal{S}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{S}}_1 = \mathrm{Gr}_0\,\widetilde{\mathcal{S}}_G$. Поэтому утверждение в) следует из предложения 14, а). Далее, в силу предложения 14, б), $\mathrm{Gr}_1\,\mathcal{O}_G = (\mathrm{Gr}_0\,\Omega^1_{\mathrm{ev}}G)_1$. Наконец, согласно теореме 11, $\Omega^1_{\mathrm{ev}}G = (\mathcal{T}G^*) = \mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}$. Поэтому

$$(\mathrm{Gr}_0\Omega^1_{\mathrm{ev}}G)_1 = (\mathrm{Gr}_0\,\mathcal{S} \otimes \mathrm{Gr}_0\,\widetilde{\mathcal{S}})_1 = \mathcal{S}_0 \otimes \widetilde{\mathcal{S}}_1 \oplus \mathcal{S}_1 \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^0.$$

Это завершает доказательство. ■

16. Пример. Рассмотрим подробно структуру $G = G_C(1|1;\ T^{2|2})$ и покажем, что в аналитической категории (и в категории алгебраических супермногообразий) G не изоморфен $\mathrm{Gr}\,G$.

В обозначениях теоремы 15 имеем $G_{\mathrm{rd}} = P_0^1 \times P_1^1$, $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}(-1,\ 0)$, $\mathcal{S}_1 = \Pi\mathcal{O}(0,\ -1)$; $\widetilde{\mathcal{S}}_0 = (\pi_0^*\Omega^1P_0^1)(1, 0)$, $\widetilde{\mathcal{S}}_1 = (\pi_1^*\Omega^1P_1^1)\ (0, 1)$, где $\pi_i\colon G_{\mathrm{rd}} \to P_i^1$. Поэтому

$$\mathcal{T} = J_G/J_G^2 = \Pi\left[(\pi_0^*\Omega^1P_0^1)(1,\ -1) \oplus (\pi_1^*\Omega^1P_1^1)(-1,\ 1)\right],$$

$$J_G^2 = \mathrm{Gr}_2\,\mathcal{O}_G = S^2(\mathcal{T}) = \Omega^2(P_0^1 \times P_1^1).$$

В соответствии с результатами § 2 препятствием к изоморфизму G и $\mathrm{Gr}\,G$ является некоторый инвариант

$$\omega \in H^1(\mathcal{T}(P_0^1 \times P_1^1) \otimes \Omega^2(P_0^1 \otimes P_1^1)) =$$

$$= H^1(P_0^1,\ \Omega^1P_0^1) \oplus H^1(P_1^1,\ \Omega^1P_1^1) = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$$

(последний изоморфизм канонический). Покажем, что $\omega = (1, 1)$.

Введем следующие обозначения для координат на больших клетках $U_i \subset G$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & 1 & \xi_1 & 0 \\ \hline \eta_1 & 0 & y_1 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} x_2 & 1 & 0 & \xi_2 \\ \hline \eta_2 & 0 & 1 & y_2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_3 & \xi_3 & 0 \\ \hline 0 & \eta_3 & y_3 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_4 & 0 & \xi_4 \\ \hline 0 & \eta_4 & 1 & y_4 \end{array}\right).$$

Пользуясь для вычисления B_{ij} формулами

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -y^{-1}\xi \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-1}\eta & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & \xi \\ \eta & y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x^{-1} + x^{-2}y^{-1}\xi\eta & -x^{-1}y^{-1}\xi \\ -x^{-1}y^{-1}\eta & y^{-1} - x^{-1}y^{-2}\xi\eta \end{pmatrix},$$

получаем из равенств $Z_j = B_{1j}^{-1}Z_1$ следующие формулы замены координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 & \xi_1 \\ \eta_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ \eta_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - y_2^{-1}\xi_2\eta_2 & -y_2^{-1}\xi_2 \\ y_2^{-1}\eta_2 & y_2^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ \eta_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \xi_3 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3^{-1} & x_3^{-1}\xi_3 \\ -x_3^{-1}\eta_3 & y_3 + x_3^{-1}\xi_3\eta_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_4 & \xi_4 \\ \eta_4 & y_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x_4^{-1} + x_4^{-2}y_4^{-1}\xi_4\eta_4 & -x_4^{-1}y_4^{-1}\xi_4 \\ -x_4^{-1}y_4^{-1}\eta_4 & y_4^{-1} - x_4^{-1}y_4^{-2}\xi_4\eta_4 \end{pmatrix}.$$

Это — полная система: пользуясь ею, можно выразить друг через друга любые пары координатных систем.

Положим $X_i = x_{i,\,\mathrm{rd}}$; $Y_i = y_{i,\,\mathrm{rd}}$. Получим стандартное четырехэлементное покрытие $P_0^1 \times P_1^1 = G_{\mathrm{rd}}$ с координатами

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3^{-1} \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4^{-1} \\ Y_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

Элемент ω представлен коциклом, который измеряет рассогласование каких-нибудь вложений ψ_i: $\mathcal{O}(U_{i,\mathrm{rd}}) \to \mathcal{O}(U_i)$, тождественных после редукции нечетных координат, например $\psi_i \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$. Пусть

$$(\psi_1 - \psi_i) \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \in \Gamma(U_{i1}, J_G^2).$$

Тогда $\frac{\partial}{\partial X_1} \otimes A_i + \frac{\partial}{\partial Y_1} \otimes B_i$ будет компонентой коцикла ω на U_{i1}. Вычисляя по предыдущим формулам, находим половину (три из шести) компонент ω:

$$\omega_{21} = \frac{\partial}{\partial X_1} \otimes Y_2^{-1}\xi_2\eta_2 = -\frac{\partial}{\partial X_1} \otimes Y_1^{-1}\xi_1\eta_1,$$

$$\omega_{31} = -\frac{\partial}{\partial Y_1} \otimes X_3^{-1}\xi_3\eta_3 = \frac{\partial}{\partial Y_1} \otimes X_1^{-1}\xi_1\eta_1,$$

$$\omega_{41} = -\frac{\partial}{\partial X_1} \otimes X_4^{-2}Y_4^{-1}\xi_4\eta_4 + \frac{\partial}{\partial Y_1} \otimes X_4^{-1}Y_4^{-2}\xi_4\eta_4.$$

Этого достаточно, чтобы вычислить ту часть ω, которая поднята с P_1^1. В самом деле, изоморфизм $\pi_0^*(\Omega^1 P_0^1) \oplus \oplus\, \pi_1^*(\Omega^1 P_1^1) \rightleftarrows \mathcal{T}(P_0^1 \times P_1^1) \otimes J_G^2$ можно задать отображениями

$$\pi_0^*(dX_1) \mapsto \frac{\partial}{\partial Y_1} \otimes \xi_1\eta_1 \quad \text{на} \quad U_1 \cup U_2;$$

$$\pi_1^*(dY_1) \mapsto -\frac{\partial}{\partial X_1} \otimes \xi_1\eta_1 \quad \text{на} \quad U_1 \cup U_3.$$

После этого канонический образующий элемент группы $H^1(P_1^1, \Omega^1 P_1^1)$, заданный на покрытии Чеха $\{Y_1 \neq 0\} \cup \cup \{Y_2 \neq 0\}$ коциклом $Y_1^{-1}dY_1 = -Y_2^{-1}dY_2$ (это его компонента на пересечении двух элементов покрытия), перейдет на $P_0^1 \times P_1^1$ в коцикл на прообразе этого покрытия с компонентой ω_{21}.

Читателю предлагается вычислить остальные три компоненты ω, а также ту часть ω, которая поднята с P_0^1, и убедиться, что разность ω и суммы поднятых коциклов когомологична нулю.

17. Функторы флагов и пространства флагов. Пусть теперь M — базисное суперпространство одного из трех типов: суперсхема, дифференцируемое супермногообразие, суперaналитическое пространство; $\mathcal{T}$ — локально свободный пучок на нем ранга d. Пусть $0 < d_1 < \ldots < d_k < d$ — последовательность суперрангов; разумеется, $d_i = d_i^0 | d_i^1$ и $d_i < d_{i+1}$ означает, что $d_i^0 \leqslant d_{i+1}^0$, $d_i^1 \leqslant d_{i+1}^1$, и по крайней мере одно из двух неравенств строгое.

Флагом длины k и типа $(d_1, \ldots, d_k)$ в $\mathcal{T}$ называется такая последовательность локально свободных подпучков $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{T}$, что $\operatorname{rk} \mathcal{S}_i = d_i$ и все вложения $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}_j$ локально-прямые. Действуя, как в § 1 гл. 1, введем в каждый из трех категорий функтор флагов указанного типа следующим определением.

Этот функтор определен на категории суперпространств над M и ставит в соответствие объекту $\varphi\colon N \to M$ (где φ — морфизм суперсхем, супермногообразий или суперaналитических пространств соответственно типу M) множество флагов типа $(d_1, \ldots, d_k)$ в пучке $\mathcal{T}_N = \varphi^*(\mathcal{T})$. Доопределение на морфизмах очевидно.

Если $d = (d_1, \ldots, d_k)$ — некоторый тип, $d' = (d_1', \ldots, d_l')$ — его подтип, то, как и в четном случае, определен морфизм функторов «проекция на подфлаги меньшего типа»:

$$\pi(d, d')\colon (\mathcal{S}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_k) \mapsto (\mathcal{S}_1' \subset \ldots \subset \mathcal{S}_l'), \quad \mathcal{S}_j' = \mathcal{S}_{i(j)},$$

где $i(j)$ определяется условием $d_j' = d_{i(j)}$.

18. Теорема. *В каждой из трех категорий функтор флагов представлен суперпространством над M, которое мы обозначаем, как и в чисто четном случае, $F_M(d_1, \ldots, d_k; \mathcal{T})$. Морфизмы $\pi(d, d')$ представлены морфизмами суперпространств над M.*

Набросок доказательства. Мы можем повторить рассуждение, проведенное в § 1 гл. 1 для чисто четного случая. При $k = 1$ в силу теоремы 10 можно положить $F_M(d_1; \mathcal{T}) = G_M(d_1; \mathcal{T})$. Чтобы провести индукцию по длине флага, рассмотрим типы $d = (d_0, d_1, \ldots, d_k)$ и $d' = (d_1, \ldots, d_k)$ и будем считать, что $F' = F_M(d'; \mathcal{T})$ уже построен. Тогда на $F_M(d'; \mathcal{T})$ имеется тавтологический флаг $\mathcal{S}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_k$, который отвечает тождественному морфизму F_M в себя. Рассмотрим его младший пучок $\mathcal{S}_1$ и построим относительный грассманиан:

$$G_{F'}(d_0; \mathcal{S}_1) \xrightarrow{\pi_0} F' \xrightarrow{\pi'} M,$$

где π_0 — структурный морфизм этого грассманиана, а π' — структурный морфизм F'. Тогда на $G_{F'}$ имеется тавтологический пучок $\mathcal{S}_0 \subset \pi_0^*(\pi'^*(\mathcal{T}))$. Положим $\pi = \pi' \circ \pi_0$: $G_{F'} \to \to M$ и рассмотрим на $G_{F'}$ флаг типа d: $\mathcal{S}_0 \subset \pi_0^* \mathcal{S}_1 \subset \ldots \ldots \subset \pi_0^* \mathcal{S}_k \subset \pi^* \mathcal{T}$.

Утверждается, что $G_{F'}$, как суперпространство над M, вместе с построенным флагом типа d и представляет функтор флагов этого типа.

Конструкция морфизма $N \to G_{F'}$, отвечающего флагу типа d на $N \xrightarrow{\varphi} M$, проводится в два шага. Сначала у флага отбрасывается младшая компонента, и оставшаяся часть, по индуктивному предположению, индуцируется морфизмом $N \to F'$. Затем младшая компонента используется для его подъема до $N \to G_{F'}$.

Та же конструкция позволяет построить морфизм суперпространств $\pi(d^{(1)}, d^{(2)})$ индукцией по длине $d^{(1)}$. Первый шаг $(k^{(1)} = 1)$ здесь тривиален, поскольку для грассманианов $\pi(d^{(1)}, d^{(0)})$ есть либо тождественный морфизм, либо структурная проекция на M. Остальные подробности мы оставляем читателю.

19. Максимальные флаги. Пусть $\operatorname{rk} \mathcal{T} = d^0|d^1$. Тип $d = (d_1, \ldots, d_k)$ флага в $\mathcal{T}$ называется максимальным, если его длина равна $k = d^0 + d^1 - 1$. Эквивалентное условие: для всех $i = 0, \ldots, k$, $d_{i+1} - d_i = 1|0$ или $0|1$, где мы полагаем $d_0 = 0|0$, $d_{k+1} = d^0|d^1$. Таким образом, имеется $\binom{d^0 + d^1}{d^0} = \binom{d^0 + d^1}{d^1}$ максимальных типов — заведомо больше одного, если $d_0 d_1 > 0$. Этим суперпространства флагов существенно отличаются от чисто четного случая.

На языке супералгебр Ли этому соответствует существование несопряженных борелевских подалгебр в $sl(d^0|d^1)$.

20. Группа Пикара и проективность. Как показал И. А. Скорняков, из вычислений в пп. 15 и 16 следует, что грассмановы супермногообразия, подложка которых допускает нетривиальное разложение в прямое произведение, не являются проективными. В действительности ни один обратимый пучок на них не имеет голоморфных сечений, кроме структурного. Простейшее доказательство непроективности $G(a|b;\ T^{m|n})$, $0 < a < m$, $0 < b < n$ можно получить следующим способом.

а) Пусть $G = G(1|1;\ T^{2|2})$, $\mathcal{O}(a, b)$ — стандартный пучок на $G_{\rm rd} = P^1 \times P^1$. Вычисление, как в п. 15, препятствия к продолжению $\mathcal{O}(a, b)$ на G показывает, что оно пропорционально $a+b$. В частности, продолжаемы только пучки $\mathcal{O}(a,-a)$, так что G не проективен.

б) Вложение $T^{2|2}\subset T^{a+1|b+1}$ доставляет замкнутое вложение $G(1|1;\ T^{2|2})\subset G(1|1;\ T^{a+1|b+1})$. Реализация второго грассманиана в двойственном виде дает вложение $G(1|1;\ T^{2|2})\subset$ $\subset G(a|b;\ (T^*)^{a+1|b+1})$. Наконец, вложение $(T^*)^{b+1|a+1}\subset T^{m|n}$ дает замкнутое вложение $G(1|1;\ T^{2|2})\subset G(a|b;\ T^{m|n})$. Поскольку меньший грассманиан не проективен, больший также не проективен.

в) Дополняя эти соображения вычислениями «непрерывной части» группы Пикара, И. А. Скорняков установил, что $\operatorname{Pic} G(a|b;\ T^{m|n})$ порожден классом пучка $\operatorname{Ber}\mathcal{S}$.

§ 4. Теорема Фробениуса и связности

1. Все определения и конструкции §§ 4—6 гл. 1 дословно переносятся на супермногообразия. Здесь мы ограничимся кратким обзором формулировок, подчеркивая некоторые особенности, связанные с наличием нечетных координат.

2. **Локальная классификация векторных полей.** Пусть X — четное или нечетное векторное поле в окрестности точки x_0 супермногообразия M.

Назовем X спрямляемым, если существует такая локальная система координат $(x^a,\ \xi^b)$ в окрестности x_0, что X имеет в ней одну из следующих форм:

а) $X=\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ («1 | 0-спрямляемое»);

б) $X=\dfrac{\partial}{\partial \xi^1}+\xi^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ («1 | 1-спрямляемое»);

в) $X=\dfrac{\partial}{\partial \xi^1}$ («0 | 1-спрямляемое»).

Возможно, название второго типа заслуживает комментария. Это — единственный случай, когда коммутант $[X,X]=$ $=2\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ отличен от нуля, и минимальная алгебра Ли, содержащая X, имеет размерность $1|1$ над основным полем. Следующая теорема В. Н. Шандера позволяет охарактеризовать спрямляемые векторные поля.

3. Теорема. *Для того чтобы векторное поле X было спрямляемо в окрестности x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

а) *X четно и не обращается в нуль в x_0 (т. е. $X\notin m_{x_0}\mathcal{T}M$) ($1|0$-спрямляемость);*

б) X нечетно и в некоторой окрестности $U \ni x_0$ отображение $X\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ сюръективно ($1|1$-*спрямляемость*);

в) *X нечетно, не обращается в нуль в x_0 и $X^2 = 0$* ($0|1$-*спрямляемость*).

Набросок доказательства. Пусть $J = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1^2$. Если X четно и не обращается в нуль в точке x_0, то в любой начальной системе координат (y^a, η^b) имеем $X \equiv \equiv \sum f_a(y) \frac{\partial}{\partial y^a} \bmod J\mathcal{T}M$, причем $f_a(y(x_0)) \neq 0$ для некоторого a. По теореме о спрямлении векторного поля в четной геометрии можно сменить систему координат на подложке так, что $\sum f_a(y) \frac{\partial}{\partial y^a}$ станет иметь вид $\frac{\partial}{\partial x^a}$. По предложению 1.8 эту замену координат можно продолжить до замены координат с тем же свойством на M. Будем считать, что $X \equiv \frac{\partial}{\partial x^1} \bmod J^{2k-1}\mathcal{T}M$, $k \geqslant 1$. Это значит, что $X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_b \eta^b \frac{\partial}{\partial \xi^b} + X'$, где $X' \in J^{2k}\mathcal{T}M$, (x^a, ξ^b) — локальная система координат. Покажем, что есть новая система координат (x^a, ζ^b), в которой $X = \frac{\partial}{\partial x^1} + X''$, $X'' \in \in J^{2k}\mathcal{T}M$, и $\zeta^b \equiv \xi^b \bmod m_{x_0}\mathcal{T}M$. Для этого положим $\zeta^b = \sum_\alpha g_\alpha^b(x)\xi^\alpha$ и решим относительно g_α^b уравнения

$$(X - X')\zeta^b = 0,$$

$$\zeta^b = \zeta^b(x^1, \ldots, x^m), \quad \zeta^b(0;\, x^2, \ldots, x^m) = \xi^b.$$

Мы добились того, что $X \equiv \frac{\partial}{\partial x^1} \bmod J^{2k}\mathcal{T}M$, $k \geqslant 1$, переход от $2k$ к $2k+1$ делается аналогично, но с заменой четных координат. Так как $J^{m+1}\mathcal{T}M = 0$, в конце концов окажется $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Этим доказано утверждение а).

Пусть X нечетно и не обращается в нуль в точке x_0. Тогда $X \equiv \sum_b f_b(y) \frac{\partial}{\partial \eta^b} \bmod J\mathcal{T}M$ и, скажем, $f_1(x_0) \neq 0$. Перепишем X в виде

$$X = \sum_b g^b(y, \eta_2, \ldots, \eta_n) \frac{\partial}{\partial \eta^b} + \sum_a \zeta^a(y, \eta_2, \ldots, \eta_n) \frac{\partial}{\partial y^a} + \eta_1 X'.$$

Перейдем к координатам (x, ξ): $x^a = y^a - \frac{\eta^1}{g^1}\zeta^a$, $\xi^1 = \frac{\eta^1}{g^1}$,

$\xi^b = \eta^b - \eta^1 \frac{g^b}{g^1}$. В этих координатах $X = \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \xi^1 X''$. Положим $X'' = Y + \eta \frac{\partial}{\partial \xi^1}$, где $\eta = X'' \xi^1$. Нетрудно убедиться, что четное дифференцирование Y не обращается в нуль в точке x_0, и потому Y $1|0$-спрямляемо. Это позволяет заключить, что $X^2 = (1 + \xi^1 \eta) \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta \frac{\partial}{\partial \xi^1}$ в подходящей системе координат. Пусть $X^2 u = 1$, $\nu = Xu$; дополнив (u, ν) до локальной системы координат, получим $X = \frac{\partial}{\partial \nu} + \nu \frac{\partial}{\partial u}$.

Разбор случая в) мы опустим. ■

4. Теорема Фробениуса. Распределением на многообразии M называется локально прямой подпучок $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}M$. Распределение называется интегрируемым, если $\mathcal{T}$ замкнуто относительно суперкоммутатора. Теорема Фробениуса для супермногообразий утверждает то же, что и для чисто четных многообразий: интегрируемость распределения равносильна тому, что локально $\mathcal{T}$ свободно порождено векторными полями вида $\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial \xi^b}\right)$, причем (x^a, ξ^b) дополняются до локальной системы координат. Это верно для голоморфного и бесконечно дифференцируемого случаев.

Доказательство можно провести индукцией по $p + q$, где $\mathrm{rk}\, \mathcal{T} = p|q$. Случаи $1|0$ и $0|1$ — это теорема 3.

5. Связность на локально свободном пучке. Пусть $\mathcal{E}$ — локально-свободный пучок на супермногообразии M. Связность на $\mathcal{E}$ определяется ковариантным дифференциалом $\nabla: \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1 M$ с формулой Лейбница

$$\nabla(ae) = (-1)^{(\tilde{a}+1)\tilde{e}} e \otimes da + (-1)^{\tilde{a}} \nabla e.$$

Знаки приспособлены к соотношениям: $\Omega^1 = \Omega^1_{\mathrm{odd}}$, $\tilde{\nabla} = 1$. Последовательность де Рама связности, кривизна, интегрируемость — все эти понятия определяются, как в чисто четном случае. Специфически нечетной конструкцией является определение правой связности, которому посвящен следующий параграф.

§ 5. Правые связности и интегральные формы

1. Правые связности. Мы продолжаем работать в категории дифференцируемых или аналитических супермногообразий, соответственно обозначаем $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Рассмотрим связность на локально свободном пучке $\mathcal{E}$ на M как ковариантное дифференцирование, т. е. K-билинейное отображение $\Delta: \mathcal{T}M \underset{K}{\otimes} \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Его можно продолжить до K-билинейного отображения $\Delta_l: \mathcal{D}_1 \underset{K}{\otimes} \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}_1$ — пучок дифференциальных операторов на M порядка $\leqslant 1$, положив $\Delta_l(f \otimes e) = fe$, где f — локальная функция, рассматриваемая как оператор нулевого порядка, и дополнив отображение по аддитивности. Аксиомы связности, задаваемой с помощью Δ_l, приобретают более простой вид: кроме K-билинейности Δ_l, имеем для любого локального оператора X порядка $\leqslant 1$, локальной функции f и сечения e:

а) $\Delta_l(f \otimes e) = fe$,

б) $\Delta_l(X \otimes fe) = \Delta_l(X \circ f \otimes e)$;

в) $\Delta_l(fX \otimes e) = f\Delta_l(X \otimes e)$.

Второе тождество — это формула Лейбница; $X \circ f$ означает произведение X и f как операторов; кружочек написан, чтобы отличить результат от применения X к f: $X \circ f = (-1)^{\tilde{f}\tilde{x}} fX + Xf$. Аналогично введем понятие правой связности:

2. Определение. *Правой связностью* на $\mathcal{E}$ называется четное K-билинейное отображение Δ_r: $\mathcal{E} \otimes \mathcal{D}_1 \to \mathcal{E}$ со следующими свойствами:

а) $\Delta_r(e \otimes f) = ef$;

б) $\Delta_r(e \otimes X \circ f) = \Delta_r(e \otimes X)f$;

в) $\Delta_r(e \otimes fX) = \Delta_r(ef \otimes X)$.

В физических работах пишут $e\overleftarrow{X}$ вместо $\Delta_r(e \otimes X)$. Если X — векторное поле, оператор правого ковариантного дифференцирования вдоль него $\nabla_r(X)$ определяется формулой $\nabla_r(X)\, e = (-1)^{\tilde{X}\tilde{e}}\, \Delta_r(e \otimes X)$.

На $\mathcal{O}_M$ имеется очевидная левая связность: $\Delta_l(X \otimes f) = Xf$. Оказывается, на $\operatorname{Ber} M = (\operatorname{Ber} \Omega^1_{\mathrm{odd}} M)^*$ имеется каноническая правая связность.

3. Предложение. *На* Ber M *имеется единственная правая связность* Δ_r, *удовлетворяющая следующему условию: для любой локальной системы координат* $(x^a) = x$ *имеем*

$$\Delta_r\left(D^*(dx) \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}\right) = 0 \quad \text{для всех } a,$$

где $D^*(dx)$ — *локальное сечение* Ber M, *двойственное к* $D(dx^1, \ldots, dx^{m+n})$.

Доказательство. Единственность Δ_r следует из того, что $D^*(dx)$ есть правый $\mathcal{O}_M$-базис Ber M, а $\frac{\partial}{\partial x^a}$ образуют правый $\mathcal{O}_M$-базис $\mathcal{T}M$ (локально), так что аксиомы правой связности однозначно определяют действие всего $\mathcal{D}_1$. В области действия (x^a) поэтому мы получаем следующую формулу для Δ_r:

$$\Delta_r\left(D^*(dx)\,f\otimes\left(\sum_a g^a\frac{\partial}{\partial x^a}+h\right)\right)=$$

$$=\Delta_r\left(D^*(dx)\otimes\sum_a(-1)^{(\tilde{f}+\tilde{g}^a)\tilde{x}^a}\left[\frac{\partial}{\partial x^a}\circ(fg^a)-\frac{\partial(fg^a)}{\partial x^a}\right]+fh\right)=$$

$$=-D^*(dx)\otimes\left[\sum_a(-1)^{(\tilde{f}+\tilde{g}^a)\tilde{x}^a}\frac{\partial(fg^a)}{\partial x^a}+fh\right],$$

которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет аксиомам правой связности.

Остается лишь проверить, что $\Delta_r\left(D^*(dy)\otimes\frac{\partial}{\partial y^b}\right)=0$, где $y^b=y^b(x)$ — другая система координат. В самом деле,

$$dy^c=\sum_a dx^a\otimes\frac{\partial y^c}{\partial x^a},\qquad\frac{\partial}{\partial y^b}=\sum_a\frac{\partial x^a}{\partial y^b}\frac{\partial}{\partial x^a},$$

откуда по предыдущей формуле

$$\Delta_r\left(D^*(dy)\otimes\frac{\partial}{\partial y^b}\right)=\Delta_r\left(D^*(dx)\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\otimes\sum_a\frac{\partial x^a}{\partial y^b}\frac{\partial}{\partial x^a}\right)=$$

$$=-D^*(dx)\sum_a(-1)^{\tilde{x}^a(\tilde{x}^a+\tilde{y}^b)}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial x^a}{\partial y^b}\right).$$

Нужно доказать, что последняя сумма равна нулю. Так как это равносильно совпадению правых связностей, определенных в координатах x, y, то достаточно проверить это для элементарных замен координат — линейных и замен одной функции, поскольку любая замена разлагается в произведение таких. Для линейных замен $\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial x^a}{\partial y^b}$ есть константа, и все тривиально. Замены четной и нечетной функции разберем отдельно. Работая в стандартном формате, будем считать, что заменяемая четная функция стоит первой, а нечетная — последней, с номером $m+n$.

Четная замена. Положим $y^1 = F(x^a)$, $y^b = x^b$ при $b \geqslant 1$; обратная замена: $x^1 = G(y^a)$, $x^a = y^a$ при $a \geqslant 1$. Тогда имеем

$$\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial x^a}{\partial y^b} = \begin{cases} \delta^a_b & \text{при } a \neq 1, \\ \dfrac{\partial G}{\partial y^b} & \text{при } a = 1, \end{cases}$$

$$\sum_a (-1)^{\tilde{x}^a(\tilde{x}^a+\tilde{y}^b)} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial x^a}{\partial y^b}\right) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^b}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^1}\dfrac{\partial G}{\partial y^b}\right) & \text{при } b \neq 1, \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^1}\dfrac{\partial G}{\partial y^1}\right) & \text{при } b = 1. \end{cases}$$

Теперь учтем тождества

$$dy^1 = dx^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \sum_{b \geqslant 2} dx^b \frac{\partial F}{\partial x^b} =$$
$$= \left(dy^1 \frac{\partial G}{\partial y^1} + \sum_{b \geqslant 2} dy^b \frac{\partial G}{\partial y^b}\right)\frac{\partial F}{\partial x^1} + \sum_{b \geqslant 2} dy^b \frac{\partial F}{\partial x^b},$$

откуда $\dfrac{\partial G}{\partial y^1}\dfrac{\partial F}{\partial x^1} = 1$, $\dfrac{\partial G}{\partial y^b}\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial x^b} = 0$. Дифференцируя по x^1, получаем требуемое.

Нечетная замена. Положим $y^{m+n} = F(x^a)$, $y^b = x^b$ при $b < m+n$; обратная замена: $x^{m+n} = G(y^b)$, $x^a = y^a$ при $a < m + n$. Тогда имеем

$$\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial x^a}{\partial y^b} = \begin{cases} \delta^a_b & \text{при } a \neq m + n, \\ \dfrac{\partial G}{\partial y^{m+n}} & \text{при } a = m + n. \end{cases}$$

$$\sum_a (-1)^{\tilde{x}^a(\tilde{x}^a+\tilde{y}^b)} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial x^a}{\partial y^b}\right) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^b}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\right] - (-1)^{\tilde{y}^b}\dfrac{\partial}{\partial x^{m+n}}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\dfrac{\partial G}{\partial y^b}\right] \\ \qquad\qquad \text{при } b \neq m + n, \\ \dfrac{\partial}{\partial x^{m+n}}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\dfrac{\partial G}{\partial y^{m+n}}\right] \\ \qquad\qquad \text{при } b = m + n. \end{cases}$$

По аналогии с четным случаем из тождества

$$dy^{m+n} = dx^{m+n}\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}} + \sum_{b<m+n} dx^b \frac{\partial F}{\partial x^b} =$$

$$= \left(dy^{m+n}\frac{\partial G}{\partial y^{m+n}} + \sum_{b<m+n} dy^b \frac{\partial G}{\partial y^b}\right)\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}} + \sum_{b<m+n} dy^b \frac{\partial F}{\partial x^b}$$

получаем

$$\frac{\partial G}{\partial y^{m+n}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial G}{\partial y^b} + \frac{\partial F}{\partial x^b}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1} = 0.$$

Так как x^{m+n} — нечетная переменная, $\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}} = H(x^1, \ldots, x^{m+n-1})$, и из первого равенства тогда следует, что $\frac{\partial}{\partial x^{m+n}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial y^{m+n}}\right] = 0.$ Наконец, при $b < m+n$, учитывая, что $\tilde{y}^b = \tilde{x}^b$:

$$\frac{\partial}{\partial x^b}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\right] - (-1)^{\tilde{y}^b}\frac{\partial}{\partial x^{m+n}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial y^b}\right] =$$

$$= -\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-2}\frac{\partial}{\partial x^b}\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}} - (-1)^{\tilde{y}^b}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x^{m+n}}\frac{\partial G}{\partial y^b} =$$

$$= -(-1)^{\tilde{x}^b}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x^{m+n}}\left[\frac{\partial G}{\partial y^b} + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{m+n}}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x^b}\right] = 0.$$

4. Интегральные формы. Интегральными формами называются сечения пучка

$$\Sigma M = \mathrm{Ber}\, M \underset{\mathcal{O}_M}{\otimes} S(\mathcal{T}M\Pi) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_M}(\Omega^{\cdot}_{\mathrm{odd}}M, \mathrm{Ber}\, M).$$

Здесь $\mathcal{T}M\Pi$ есть $\mathcal{O}_M$-модуль с тем же левым умножением на $\mathcal{O}_M$, что и $\mathcal{T}M$, и с перевернутой четностью. По аналогии с внешним дифференциалом на ΩM можно определить дифференциал δ: $\Sigma M \to \Sigma M$, $\delta^2 = 0$. Сначала введем определение в локальных координатах. В области действия координат (x^a) имеем $\Sigma M = \mathrm{Ber}\, M \underset{K}{\otimes} K\left[\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right]$; положим

$$\delta^x = \sum_a \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\underset{K}{\otimes}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}(-1)^{\tilde{x}^a}.$$

5. Предложение. $\delta = \delta^x$ *не зависит от выбора системы координат* (x^a) *и* $\delta^2 = 0$.

Доказательство. Для проверки $\delta^2 = 0$ применим критерий § 4 гл. 5. Операторы $\nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}$ имеют противоположную четность; вторые попарно суперкоммутируют. Остается проверить, что первые тоже попарно суперкоммутируют. Пусть $X = \frac{\partial}{\partial x^a}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^b}$. Тогда для $\dim M = m|n$

$$\nabla_r(X)(D^*(dx)f) = (-1)^{\widetilde{X}(m+\widetilde{f})}\Delta_r(D^*(dx)f \otimes X) =$$
$$= (-1)^{\widetilde{X}m+1}D^*(dx)Xf,$$

откуда $[\nabla_r(X), \nabla_r(Y)] = (-1)^{(\widetilde{X}+\widetilde{Y})m}\nabla_r([X, Y]) = 0$.

Для проверки корректности покажем прежде всего, что на $\mathrm{Ber}\, M \otimes \mathcal{T}M\Pi$ δ^x не зависит от (x^a), точнее,

$$\delta^x(\omega \otimes X\Pi) = (-1)^{\widetilde{\omega}+\widetilde{X}}\Delta_r(\omega \otimes X).$$

Действительно, пусть $\omega = D^*(dx)f$, $X = \sum g^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Тогда

$$\delta^x(\omega \otimes X\Pi) =$$
$$= \left(\sum_b \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right) \underset{K}{\otimes} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\Pi\right)}(-1)^{\widetilde{x}^b}\right)\left(\sum_a D^*(dx)fg^a \underset{K}{\otimes} \frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right) =$$
$$= \sum_a (-1)^{\widetilde{x}^a+(\widetilde{x}^a+1)(\widetilde{\omega}+\widetilde{g}^a)}\nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)(D^*(dx)fg^a) =$$
$$= \sum_a (-1)^{\widetilde{x}^a+(\widetilde{x}^a+1)(\widetilde{\omega}+\widetilde{g}^a)}(-1)^{\widetilde{x}^a(\widetilde{\omega}+\widetilde{g}^a)}\Delta_r\left(D^*(dx)fg^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}\right) =$$
$$= (-1)^{\widetilde{\omega}+\widetilde{X}}\Delta_r(\omega \otimes X).$$

Наконец, докажем, что для $F, G \in K\left[\frac{\partial}{\partial x^b}\Pi\right]$ имеем формулу Лейбница

$$\delta^x(\omega \underset{K}{\otimes} FG) = \delta^x(\omega \underset{K}{\otimes} F)G + (-1)^{\widetilde{G}\widetilde{F}}\delta^x(\omega \underset{K}{\otimes} G)F.$$

Отсюда индукцией по степени F, начиная с единицы, будет следовать, что $\delta^x(\omega \otimes F)$ не зависит от (x^a).

В самом деле:

$$\delta^x(\omega \otimes FG) = \left[\sum_a \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right) \underset{K}{\otimes} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}(-1)^{\widetilde{x}^a}\right](\omega \otimes FG) =$$

$$= \sum_a \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\omega \otimes (-1)^{\widetilde{\omega}(\widetilde{x}^a+1)+\widetilde{x}^a}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}G + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\widetilde{F}(\widetilde{x}^a+1)} F \frac{\partial G}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}\right],$$

разбиение на два слагаемых в квадратных скобках отвечает правой части формулы Лейбница. ■

6. Примечания. а) Как обычно, в чисто четном случае ($n = 0$) имеется изоморфизм $\mathrm{Ber}\, M \to \Omega^m M$, который переводит $D^*(dx)$ в $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$. (Четность этого изоморфизма есть $(-1)^m$, если считать, что $\Omega^m M$ имеет ранг $1|0$). Операция свертки векторного поля с дифференциальной формой позволяет построить изоморфизм $\Omega^m M \otimes \otimes \Lambda^i(\mathcal{T}M) \rightleftarrows \Lambda^{m-i}(\mathcal{T}^*M) = \Omega^{m-i}M$. Над пучком чисто четных колец $\mathcal{O}_M$ можно отождествить $\Lambda^i(\mathcal{T}M)$ с $S^i(\mathcal{T}M\Pi)$. Таким образом, в чисто четном случае интегральные формы, по существу, совпадают с дифференциальными; дифференциалы при этом также согласованы с точностью до некоторых знаков.

б) Если $\mathbf{Z}$-градуировку модуля дифференциальных форм выбирать обычным способом, т. е. полагать $\mathcal{O}_M = \Omega^0$, $dx^a \in \in \Omega^1$, то естественно считать, что $S^i(\mathcal{T}M\Pi)$ имеет степень $-i$ и что δ увеличивает степень на 1. Относительно степени $D^*(dx)$ возможны разные решения. Поскольку для четной константы t имеем $D^*(d(tx)) = t^{m-n}D^*(dx)$, можно считать, что $\mathrm{Ber}\, M = \Sigma_{m-n}M$. Если хотеть, чтобы гомологии комплекса сечений интегральных форм попадали в тот же интервал, что и дифференциальных, естественнее считать, что $\mathrm{Ber}\, M = = \Sigma_m M$:

$$\mathcal{O}_M \to \Omega^1 M \to \ldots \to \Omega^m M \to \Omega^{m+1} M \to \ldots$$

$$\ldots \to \Sigma_{-1} M \to \Sigma_0 M \to \Sigma_1 M \to \ldots \to \mathrm{Ber}\, M.$$

7. **Последовательность Спенсера пучка с правой связностью.** Пусть теперь $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок с правой связностью Δ_r на M. Положим $\Sigma(\mathcal{E}) = = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_M} S(\mathcal{T}M\Pi)$. Предыдущие конструкции можно про-

вести для $\mathcal{E}$ вместо $\operatorname{Ber} M$. Точнее, в области действия координат (x^a) положим

$$\delta^x(\mathcal{E},\Delta_r)=\sum_a \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\underset{K}{\otimes}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}(-1)^{\tilde{x}^a}:\ \Sigma(\mathcal{E})\to\Sigma(\mathcal{E}).$$

Тогда справедливы следующие факты.

8. **Предложение.** а) $\nabla_r=\delta^x(\mathcal{E},\ \Delta_r)$ *не зависит от выбора системы координат* (x^a) *и определяется лишь связностью* Δ_r.

б) $\nabla_r^2:\ \Sigma(\mathcal{E})\to\Sigma(\mathcal{E})$ *есть* $\mathcal{O}_M$*-линейный оператор, называемый кривизной правой связности* Δ_r.

Доказательство. Утверждение а) проверяется буквальным повторением соответствующей части доказательства предложения 5.

Для доказательства б) удобно вычислить ∇_r^2 в координатах (x^a). Положим $\Phi_{ba}=\left[\nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right),\ \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\right]:\ \mathcal{E}\to\mathcal{E}$. Тогда прямое вычисление показывает, что на $\mathcal{E}\underset{K}{\otimes}S(\mathcal{T}M\Pi)$

$$\nabla_r^2=\sum_{a,b}(-1)^{\tilde{x}^a+1}\Phi_{ba}\otimes\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right)}\,\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\Pi\right)}.$$

Из определения $\nabla_r(X)$ следует, что $\nabla_r(X)(fe)=(-1)^{\tilde{X}\tilde{f}}f\nabla_r(X)(e)+$ (член, включающий производную Xf), где f — функция на M, e — сечение $\mathcal{E}$. Поэтому $\Phi_{ba}(fe)=(-1)^{\tilde{f}(\tilde{x}^a+\tilde{x}^b)}f\Phi_{ba}(e)$. Отсюда следует, что ∇_r^2 линеен. ■

9. **Теорема.** *Категории правых и левых связностей эквивалентны. Точнее, рассмотрим отображение* B, *ставящее в соответствие паре* $(\mathcal{E},\ \Delta_l)$ *пару* $(\operatorname{Ber} M\otimes\mathcal{E},\ \Delta_r)$, *где для любого векторного поля* X, *по определению,*

$$\Delta_r(\omega\otimes e\otimes X)=$$

$$=(-1)^{\tilde{X}\tilde{e}}\,\omega\otimes\Delta_l(X\otimes e)+(-1)^{\tilde{X}\tilde{e}}\,\Delta_r(\omega\otimes X)\otimes e.$$

Это отображение определено корректно и однозначно продолжается до функтора на категории морфизмов $(\mathcal{E},\Delta_l)\to(\mathcal{E}',\Delta_l')$, *коммутирующих со связностями. Этот функтор является эквивалентностью.* ■

Мы опускаем доказательство, которое состоит из серии автоматических проверок.

Отметим только, что кривизны соответствующих друг другу правой и левой связности в естественном смысле отождествляются. В последовательности де Рама $\mathcal{E} \otimes \Omega^{\cdot} M$ кривизна ∇_l^2 есть умножение на $\Phi_l \in \Gamma(\mathrm{End}\, \mathcal{E} \otimes \Omega^{\bullet} M)$. В последовательности Спенсера $\Sigma(\mathrm{Ber}\, M \otimes \mathcal{E})$ кривизна ∇_r^2 может интерпретироваться как свертка с той же формой Φ_l.

§ 6. Интеграл Березина

1. Напомним, что комплекс пучков дифференциальных форм на чисто четном дифференцируемом многообразии $\mathcal{O}_M \to \Omega^1 M \to \Omega^2 M \to \ldots$ точен всюду, кроме члена нуль, а комплекс его сечений с компактными носителями (или финитных сечений) в качестве своих когомологий имеет $H_c^{\cdot}(M, \mathbf{R})$. Позже мы установим соответствующие факты для супермногообразий и комплекса интегральных форм.

Начнем с правого конца этого комплекса: $\Sigma_m M = \mathrm{Ber}\, M$, $\Sigma_m^c(M) = \mathrm{Ber}_c(M) = \Gamma_c(M, \mathrm{Ber}\, M)$; $M^{m|n}$ — ориентированное связное дифференцируемое супермногообразие, c указывает на компактные носители. Напомним роль условия компактности в чисто четной ситуации. Для функций и форм на $M^{1|0} = R$ имеются две точные последовательности:

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathcal{O}(\mathbf{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbf{R}) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_c(\mathbf{R}) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(\mathbf{R}) \xrightarrow{\int} \mathbf{R} \to 0,$$

поскольку форму $\omega \in \Omega_c^1(\mathbf{R})$ всегда можно представить в виде $\omega = df$, $f \in \mathcal{O}(\mathbf{R})$, но выбор $f \in \mathcal{O}_c(\mathbf{R})$ возможен, только если $\int \omega = 0$. Аналогичпую роль играет функционал $\omega \mapsto \int\limits_M \omega$ для общих форм объема с компактным носителем. Конструкция интеграла Березина $\int\colon \mathrm{Ber}_c(M) \to \mathbf{R}$ — задача этого параграфа. Мы предполагаем, что M_{rd} ориентировано.

2. Определение. а) Пусть (x^a) — локальная система координат на M такая, что $(x^1, \ldots, x^m)$ четны и определяют на M_{rd} отмеченную ориентацию, $(x^{m+1}, \ldots, x^{m+n})$ нечетны. Пусть $\omega \in \mathrm{Ber}_c(M)$ — форма с компактным носителем в области действия координат (x^a):

$$\omega = D^*(dx) \otimes \sum_{\alpha} (x^{m+1})^{\alpha_1} \ldots (x^{m+n})^{\alpha_n} f_\alpha(x^1, \ldots, x^m).$$

В таком случае полагаем

$$\int\limits_M \omega = (-1)^{mn} \int\limits_{M_{\mathrm{rd}}} dx^1 \ldots dx^m f_{1\ldots 1}(x^1, \ldots, x^m).$$

б) Для общей формы объема с компактным носителем $\omega \in \mathrm{Ber}_c(M)$ определяем $\int\limits_M \omega$ с помощью разбиения единицы и п. а) по аддитивности.

3. Теорема. *Определение интеграла корректно. Для формы* $\omega \in \mathrm{Ber}_c(M)$ *существует* $\nu \in \Sigma^c_{m-1}(M)$ *с* $\delta\nu = \omega$, *если и только если* $\int\limits_M \omega = 0$.

Доказательство. В области действия координат (x^a) имеем

$$\delta\left(D^*(dx)\, f \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right) = \pm D^*(dx)\,\frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

Следовательно, в образе δ лежат формы $D^*(dx)\left(\sum\limits_{i,a} \frac{\partial f_i}{\partial x^a}\right)$, где f_i имеют компактные носители. В частности, если $\alpha \neq (1, \ldots, 1)$, то существует x^{m+j} с $\alpha_j = 0$, и тогда

$$(x^{m+1})^{\alpha_1} \ldots (x^{m+n})^{\alpha_n} f_\alpha(x^1, \ldots, x^n) = \pm \frac{\partial}{\partial x^{m+j}}(x^{m+j} x^\alpha f_\alpha).$$

В частности, в интеграл Березина не вносят вклада именно те формы, которые в нашей координатной области лежат в образе δ. Наконец, $D^*(dx)dx^{m+1} \ldots dx^{m+n} f_{1\ldots 1}$ лежит в образе δ, только если $f_{1\ldots 1}$ есть обычная дивергенция.

Остается переформулировать эти соображения в глобальной и инвариантной относительно замен координат форме. Разобьем рассуждение на несколько шагов.

а) $\mathrm{Ber}_c(M) = \delta(\Sigma^c_{m-1}(M)) + J^n_M \mathrm{Ber}_c(M)$.

Для доказательства с помощью разбиения единицы представим любую форму $\omega \in \mathrm{Ber}_c(M)$ в виде $\omega = \sum \omega^{(i)}$, где носитель $\omega^{(i)}$ лежит в области действия $(x^a_{(i)})$ и компактен, сумма локально конечна. Разобьем $\omega^{(i)}$, как в начале доказательства: $\omega^{(i)} = \omega_1^{(i)} + x_{(i)}^{m+1} \ldots x_{(i)}^{m+n} \omega_2^{(i)}$, $\omega_1^{(i)}$ содержит лишь мономы по нечетным координатам степени $<n$. Тогда $\sum\limits_i \omega_1^{(i)} \in \delta(\Sigma^c_{m-1}(M))$, $\omega - \sum\limits_i \omega_1^{(i)} \in J^n_M \mathrm{Ber}_c(M)$.

б) Имеется естественный изоморфизм пучков $\mathcal{O}_{M_{\mathrm{rd}}}$-модулей

$$b\colon J^n_M \operatorname{Ber}_{\mathrm{c}}(M) \xrightarrow{\sim} \Omega^m_{\mathrm{c}}(M_{\mathrm{rd}}),$$

который в любых локальных координатах определяется формулой

$$b\,(D^*(dx)\,x^{m+1}\,\dots\,x^{m+n}f) = dx^1_{\mathrm{rd}}\,\dots\,dx^m_{\mathrm{rd}}f_{\mathrm{rd}},\quad f_{\mathrm{rd}}=f \bmod J_M.$$

В действительности имеется соответствующий изоморфизм пучков $J^n_M \operatorname{Ber} M \to \Omega^n M_{\mathrm{rd}}$. Для проверки этого достаточно убедиться в согласованности левой и правой частей при замене координат на (y^a). Следующее вычисление показывает это также для аналитических многообразий:

$$D^*(dy)\,y^{m+1}\,\dots\,y^{m+n} = D^*(dx)\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)y^{m+1}\,\dots\,y^{m+n} =$$

$$= D^*(dx)\det\left(\frac{\partial y^{\leqslant m}}{\partial x^{\leqslant m}}\right)\det{}^{-1}\left(\frac{\partial y^{>m}}{\partial x^{>m}}\right)y^{m+1}\,\dots\,y^{m+n};$$

$$dy^1_{\mathrm{rd}}\,\dots\,dy^m_{\mathrm{rd}} = \det\left(\frac{\partial y^{\leqslant m}_{\mathrm{rd}}}{\partial y^{\leqslant m}_{\mathrm{rd}}}\right)dx^1_{\mathrm{rd}}\,\dots\,dx^m_{\mathrm{rd}}.$$

Поскольку, очевидно, $\det\left(\frac{\partial y^{\leqslant m}}{\partial x^{\leqslant m}}\right)_{\mathrm{rd}} = \det\left(\frac{\partial y^{\leqslant m}_{\mathrm{rd}}}{\partial x^{\leqslant m}_{\mathrm{rd}}}\right)$, остается убедиться, что $\det{}^{-1}\left(\frac{\partial y^{>m}}{\partial x^{>m}}\right)y^{m+1}\,\dots\,y^{m+n} = gx^{m+1}\,\dots\,x^{m+n}$, где $g_{\mathrm{rd}} = 1$. Пусть $y^{m+j} = \sum\limits_i f^j_i x^{m+i} \bmod J^2_M$, где f^j_i — четные функции. Тогда $\det\left(\frac{\partial y^{>m}}{\partial x^{>m}}\right)_{\mathrm{rd}} = \det(f^j_i)_{\mathrm{rd}}$, $y^{m+1}\,\dots\,y^{m+n} = \det(f^j_i)\,x^{m+1}\,\dots\,x^{m+n}$, откуда следует требуемое.

в) $b\left(\delta\left(\Sigma^{\mathrm{c}}_{m-1}(M)\right)\cap J^n_M \operatorname{Ber}_{\mathrm{c}}(M)\right) = d\left(\Omega^{m-1}_{\mathrm{c}}(M_{\mathrm{rd}})\right)$.

Проверим включение в обе стороны. Пусть $\omega \in J^n_M \operatorname{Ber}_{\mathrm{c}}(M)$, $\omega = \delta\nu$, $\nu \in \Sigma^{\mathrm{c}}_{m-1}(M)$. Разложим $\nu = \sum \nu^{(i)}$, как в п. а). Можно считать, что $\nu^{(i)} = x^{m+1}_{(i)}\,\dots\,x^{m+n}_{(i)}\,\mu^{(i)}$, так как $\delta^2 = 0$, а компоненты $\nu^{(i)}$ с неполным числом нечетных $x_{(i)}$ лежат в образе δ. Тогда $b\,(\delta\nu^{(i)}) \in$

$\in d(\Omega_{\mathrm{c}}^{m-1}(M_{\mathrm{rd}}))$, и суммирование по i доказывает, что левая часть содержится в правой.

Наоборот, пусть $b(\omega) = d(\Omega_{\mathrm{c}}^{m-1}(M))$, где $\omega \in J_M^n \mathrm{Ber}_{\mathrm{c}}(M)$. Положим $b(\omega) = d\left(\sum\limits_i \nu_{(i)}\right)$, где $\nu_{(i)}$ — дифференциальная форма с компактным носителем на M_{rd} в области действия $(x^1_{(i)_{\mathrm{rd}}}, \ldots, x^m_{(i)_{\mathrm{rd}}})$. «Поднимем» $\nu_{(i)}$ до интегральной формы $\mu_{(i)}$, в координатах:

$$\nu_{(i)} = \sum_j dx^1_{(i)_{\mathrm{rd}}} \ldots \widehat{dx}^j_{(i)_{\mathrm{rd}}} \ldots dx^m_{(i)_{\mathrm{rd}}} f^j_{(i)_{\mathrm{rd}}},$$

$$\mu_{(i)} = \sum_j \pm D^*(dx)\, x_{(i)}^{m+1} \ldots x_{(i)}^{m+n} f^j_{(i)} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j_{(i)}} \Pi,$$

где знаки $\pm$ выбраны так, что $b(\delta\mu_{(i)}) = \nu_{(i)}$. Тогда носитель $\mu_{(i)}$ тот же, что $\nu_{(i)}$, и $b(\omega - \delta\mu) = 0$, где $\mu = \sum\limits_i \mu_{(i)} \in$ $\in J_M^n \Sigma_{m-1}^{\mathrm{c}}(M)$.

Положим $\omega' = \omega - \delta\mu$. Выберем разбиение единицы $(g_{(i)})$, подчиненное координатным областям. Тогда $b(g_{(i)}\omega') =$ $= g_{(i)\mathrm{rd}} b(\omega') = 0$. Пусть $g_{(i)}\omega' = \omega'_{(i)}$. Так как $b(\omega'_{(i)}) = 0$, то разложение $\omega'_{(i)}$ по координатам $(x^a_{(i)})$ не содержит члена, делящегося на $x_{(i)}^{m+1} \ldots x_{(i)}^{m+n}$. Значит, $\omega'_{(i)} = \delta\mu'_{(i)}$, где носитель $\mu'_{(i)}$ не больше носителя $\omega'_{(i)}$. Окончательно, $\omega =$ $= \delta(\mu + \sum \mu'_{(i)})$.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы. Отображение b индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Ber}_{\mathrm{c}}(M)/\delta(\Sigma_{m-1}^{\mathrm{c}}(M)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathrm{c}}^m(M_{\mathrm{rd}})/d\Omega_{\mathrm{c}}^{m-1}(M_{\mathrm{rd}}).$$

С другой стороны, обычный интеграл формы с компактным носителем по M_{rd} индуцирует изоморфизм последнего пространства с $\mathbf{R}$. Интеграл Березина и есть композиция этих двух изоморфизмов, что очевидно из его определения. ■

4. **Замечание.** Если форма объема $\omega \in \Gamma(M, \mathrm{Ber}\, M)$ не имеет компактного носителя, интеграл Березина $\int \omega$ можно рассматривать как обобщенную суперфункцию на M, т. е. функционал на $\Gamma_{\mathrm{c}}(M, \mathcal{O}_M)$, ставящий в соответствие функции f интеграл $\int \omega f$.

§ 7. Плотности

1. Пусть M — некоторое супермногообразие, $d \leqslant \dim M$ — суперразмерность. Цель этого параграфа — ввести объекты, которые можно интегрировать по иммерсированным d-мерным подсупермногообразиям в M. Идея состоит в том, чтобы определить на M эти объекты таким образом, чтобы они вели себя функториально относительно иммерсий $\varphi\colon N^d \to M$ и чтобы их перенос на N^d оказывался формой объема на N^d. Тогда интеграл от этой формы объема по Березину и будет тем, что нам нужно.

Точнее, построим относительный грассманиан $G = G_M(d; \mathcal{T}M) \overset{\pi}{\to} M$ и обозначим через $\mathcal{S}$ тавтологический пучок на нем.

2. **Определение.** *d-плотностью* на M называется любое локальное сечение пучка $(\operatorname{Ber} \Pi\mathcal{S}^*)^*$ на G. ■

Заметим, что область определения плотности есть открытое подсуперпространство в G, а не в M; с точки зрения M эта область определения состоит из некоторых точек M и некоторых отмеченных d-мерных касательных плоскостей в этих точках.

Будем обозначать через Ξ^d пучок $(\operatorname{Ber} \Pi\mathcal{S}^*)^*$.

3. **Предложение.** *Пусть* $\varphi\colon N \to M$ *— некоторая иммерсия супермногообразий,* $\dim M = d$, τ *— некоторая плотность на M. Тогда на N можно канонически определить некоторую форму объема* $\varphi^*(\tau)$, *т. е. сечение* $\operatorname{Ber} N$ *над подходящим открытым подмножеством N.*

Доказательство. Поскольку φ — иммерсия, $d\varphi\colon \mathcal{T}N \to \varphi^*(\mathcal{T}M)$ есть локально прямое вложение. По универсальному свойству грассманиана G существует единственный морфизм $G\varphi\colon N \to G$ со свойствами $\mathcal{T}N = (G\varphi)^*(\mathcal{S})$ и $\varphi = \pi \circ G\varphi$; разумеется, отождествляется с $(G\varphi)^*\mathcal{S}$ образ $\mathcal{T}N$ относительно $d\varphi$. Поэтому $\operatorname{Ber} N = (\operatorname{Ber} \Pi\mathcal{T}^*N)^* = (G\varphi)^*(\operatorname{Ber} \Pi\mathcal{S}^*)^*$ (читатель простит нам обилие звездочек, к тому же обозначающих в одной формуле разные вещи).

Теперь, если $\tau \in \Gamma(V, (\operatorname{Ber} \Pi\mathcal{S}^*)^*)$, $V \subset G$ открыто, мы полагаем

$$\varphi^*(\tau) = (G\varphi)^*(\tau) \in \Gamma((G\varphi)^{-1}(V), \operatorname{Ber} N). \quad ■$$

4. **Замечания.** d-плотности на M как объект интегрирования обладают по крайней мере двумя особенностями: а) $\varphi^*(\tau)$ «зависит от первых производных» иммерсии φ,

поскольку $d\varphi$ используется в конструкции подъема $G\varphi$ до грассманиана.

б) Есть все шансы за то, что область определения τ не будет содержать цилиндра $\pi^{-1}(U)$, $U \subset M$, т. е. что для иммерсии φ будут запрещенные направления. Разберемся в этом подробнее. Напомним, что в чисто четной комплексно-аналитической геометрии на абсолютном грассманиане $G(d;\ T)$ тавтологические пучки $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ являются отрицательными в том смысле, что порожденная ими тензорная алгебра (без дуализаций) не имеет непостоянных голоморфных сечений над всем грассманианом. Наоборот, $\mathcal{S}^*$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^*$ положительны.

Пусть теперь $G = G(d_0|d_1;\ T_0 \oplus T_1)$. Как мы уже знаем (см. § 3), $G_{\rm rd} = G(d_0;\ T_0) \times G(d_1;\ T_1)$, $\mathcal{S}_{\rm rd} = \pi_0^*\mathcal{S}_0 \oplus \pi_1^*\Pi\mathcal{S}_1$. Поэтому $\Pi\mathcal{S}^*_{\rm rd} = \pi_0^*\Pi\mathcal{S}^*_0 \oplus \pi_1^*\mathcal{S}^*_1$ и $\left(\operatorname{Ber}\Pi\mathcal{S}^*_{\rm rd}\right)^*$ будет, вообще говоря, тензорным произведением двух обратимых пучков, пришедших с G_0 и G_1, из которых один положителен, а другой отрицателен. В случае, если отрицательный сомножитель присутствует, у $\left(\operatorname{Ber}\Pi\mathcal{S}^*_{\rm rd}\right)^*$ не будет голоморфных сечений над G. В относительном варианте это означает отсутствие послойно голоморфных сечений вдоль цилиндров $\pi^{-1}(U)$.

Следующая теорема показывает, что в тех случаях, когда голоморфные вдоль слоев сечения есть, они доставляются с помощью дифференциальных и интегральных форм.

5. Теорема. *Пусть* $\dim M = m|n$. *Пучок d-плотностей Ξ^d чисто положителен вдоль слоев π, только если $d = p|0$ либо $d = p|n$, и чисто отрицателен, только если $d = 0|q$ либо $d = m|q$. В первых двух случаях имеются канонические отображения форм в плотности:*

а) $d = p|0$: $\Gamma(U;\ \Omega^p M) \to \Gamma(\pi^{-1}(U),\ \Xi^{p|0})$,

б) $d = p|n$: $\Gamma(U;\ \Sigma_p M) \to \Gamma(\pi^{-1}(U),\ \Xi^{p|n})$.

В остальных двух случаях имеем:

в) $d = 0|q$: $\Xi^{0|q} = S^q(\mathcal{S})\Pi^q$,

г) $d = m|q$: $\Xi^{m|q} = \pi^*(\operatorname{Ber} M) \otimes \Pi^{n-q}S^{n-q}(\widetilde{\mathcal{S}})$.

В частности, $m|n$-плотности — это сечения пучка $\operatorname{Ber} M$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любого локально-свободного пучка $\mathcal{F}$ чисто четного либо чисто нечетного ранга имеют место изморфизмы, выражающие тензорный характер березиниана (в отличие от общего случая):

$$\operatorname{rk}\mathcal{F} = r\,|\,0: \quad (\operatorname{Ber}\Pi\mathcal{F})^* = S^r(\Pi\mathcal{F}): \; D^*(\Pi f_1, \ldots, \Pi f_r) \mapsto$$
$$\mapsto \Pi f_1 \ldots \Pi f_r;$$
$$\operatorname{rk}\mathcal{F} = 0\,|\,r: \operatorname{Ber}\Pi\mathcal{F} = \Pi^r S^r(\mathcal{F}): \; D(\Pi f_1, \ldots, \Pi f_r) \mapsto$$
$$\mapsto \Pi^r(f_1 \ldots f_r).$$

Отсюда и из замечаний предыдущего пункта следует, что если $0 < d_0 < m$, $0 < d_1 < n$, то пучок $\operatorname{Gr}_0 \Xi^d$ не может быть ни чисто положительным, ни чисто отрицательным. Далее, для $d = p|0$ находим $(\operatorname{Ber}\Pi\mathcal{S}^*)^* = S^p(\Pi\mathcal{S}^*)$. После этого из стандартного морфизма a: $\pi^*(\Omega^1_{\text{odd}}M) \to \Pi\mathcal{S}^*$ находим морфизм пучков

$$S^p(a): \; \pi^*(\Omega^p M) \to S^p(\Pi\mathcal{S}^*) = \Xi^{p|0},$$

откуда и следуют отображения а).

Для конструкции отображений б) нужно сначала выразить $\Xi^{p|n}$ через $\widetilde{\mathcal{S}}$, пользуясь точной последовательностью $0 \to \Pi\widetilde{\mathcal{S}} \to \pi^*(\Omega^1_{\text{odd}}M) \to \Pi\mathcal{S}^* \to 0$, откуда

$$(\operatorname{Ber}\Pi\mathcal{S}^*)^* \otimes (\operatorname{Ber}\Pi\widetilde{\mathcal{S}})^* = \operatorname{Ber} M,$$

и далее

$$\Xi^{p|n} = \operatorname{Ber} M \otimes \operatorname{Ber}\Pi\widetilde{\mathcal{S}} = \operatorname{Ber} M \otimes (S^{m-p}(\Pi\widetilde{\mathcal{S}}))^* =$$
$$= \operatorname{Ber} M \otimes S^{m-p}(\widetilde{\mathcal{S}}\Pi^*).$$

Теперь остается построить симметрическую степень морфизма b: $\pi^*(\mathcal{T}M\Pi) \to \widetilde{\mathcal{S}}^*\Pi$:

$$\operatorname{id} \otimes S^p(b): \; \pi^*(\operatorname{Ber} M \otimes S^{m-p}(\mathcal{T}M\Pi)) = \pi^*(\Sigma_p M) \to \Xi^{p|n}.$$

Остальные два утверждения теоремы проверяются аналогично: в) непосредственно, а г) переходом к $\widetilde{\mathcal{S}}$. ■

6. Таким образом, из теоремы 5 вытекает, что дифференциальные формы можно интегрировать по подмногообразиям нечетной размерности нуль, а интегральные формы — по подмногообразиям нечетной коразмерности нуль. Для подмногообразий промежуточных нечетных размерностей мы пока не знаем ничего, кроме плотностей. Естественно задаться вопросом, существуют ли конструкции, которые сами собой приводят к плотностям. В чисто четной геометрии, например, по симплектической форме ω на M строятся формы $\omega^{\wedge p}$, т. е. $2p$-плотности, а по метрике $ds^2 =$

$= g_{ab}dx^a dx^b$ индуцированные плотности на p-мерных подсупермногообразиях, определенные с точностью до знака как длина кривых $\sqrt{ds^2}$ или объем $\sqrt{|\det g|}\,d^m x$.

Алгебраический механизм, на котором основана эта конструкция, переносится в супергеометрию.

7. Лемма. *Пусть A — суперкоммутативное кольцо, S — свободный A-модуль, b: $S \otimes S \to A$ — невырожденная четная билинейная форма на S. Тогда по ней однозначно определяется квадрат «формы объема» $w(b) \in (\operatorname{Ber} S^*)^{-2}$.*

Доказательство. Рассмотрим b как изоморфизм b: $S^* \to S$. Тогда $\operatorname{Ber} b$ есть изоморфизм

$$\operatorname{Ber} b\colon \operatorname{Ber} S^* \to \operatorname{Ber} S = (\operatorname{Ber} S^*)^{-1}.$$

Дуализируя, получаем изоморфизм $A \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Ber} S^*)^{-2}$; $w(b)$ есть образ единицы при этом отображении.

Глобализация этой конструкции приводит к следующему результату.

8. Предложение. *Пусть M — супермногообразие с суперметрикой ω, т. е. невырожденной билинейной формой на $\mathcal{T}M\Pi$. Тогда для любой суперразмерности $d \leqslant \dim M$ по ω можно построить канонический квадрат d-плотности $w_d(\omega) \in \Gamma(V;\ (\Xi^d)^2)$, где $V \subset G_M(d;\ \mathcal{T}M)$ — максимальное открытое множество, на котором ограничение формы $\pi^*(\omega)$ на подпучок $\mathcal{S}\Pi \subset \pi^*(\mathcal{T}M\Pi)$ невырождено.* ■

9. Замечания и варианты. а) Если применить эту конструкцию к чисто четному случаю и кососимметричной форме ω, то мы получим $w_d(\omega) = 0$ для нечетного d, поскольку ограничение кососимметричной формы на нечетномерное пространство всегда вырождено, и $w_{2d}(\omega) = (\omega^{\wedge d})^2$ (в смысле отождествления форм с плотностями). Возможность извлечь квадратный корень связана с тем, что детерминант кососимметричной матрицы есть квадрат ее пфаффиана. Для четной (анти)симметричной формы в четно-нечетном случае, где смешаны O и Sp, часть O всегда мешает извлечь квадратный корень.

В чисто четном случае существенную роль играет также замкнутость формы ω, из которой следует замкнутость $\omega^{\wedge d}$. В супергеометрии также можно ввести важное понятие замкнутой плотности. В какой-то мере это компенсирует отсутствие внешнего дифференциала, связывающего плотности разных размерностей.

б) В качестве специфически супергеометрического варианта симплектической структуры предлагалось рассматривать супермногообразия M, снабженные нечетной невырожденной замкнутой формой $\omega \in (\Omega^2_{\mathrm{odd}}M)_1$. Попытка построить плотности по такой форме по аналогии с леммой 7 не приводит к успеху по следующей причине.

В обозначениях леммы 7 имеем четный изоморфизм b: $S^* \to \Pi S$ (вместо S). Его березиниан доставляет изоморфизм модулей, которые и без того канонически изоморфны (а не двойственны): $\mathrm{Ber}\, S^* = (\mathrm{Ber}\, S)^{-1} \to \mathrm{Ber}\, \Pi S = (\mathrm{Ber}\, S)^{-1}$. Таким образом, $\mathrm{Ber}\, b$ можно отождествить с обратимым элементом кольца A_0. Глобализация этой конструкции приводит к семейству функций $v_d(\omega)$ на $G_M(d;\, \mathcal{T}M)$, роль которых не вполне ясна.

в) Предыдущее рассуждение показывает, что если заменить билинейную форму b на изоморфизм p: $S \to \Pi S$, то снова появляется возможность построить квадрат формы объема. Задание на M «П-симметрии», т. е. изоморфизма p: $\mathcal{T}M \to \Pi\mathcal{T}M$ с условием $p^2 = 1$, является вполне интересной супергеометрической структурой. На языке G-структур Картана оно означает редукцию структурной группы касательного расслоения до особого аналога полной линейной группы в супералгебре. Однако не любой локально-прямой подпучок $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}M$ переводится в себя П-симметрией p. Такие подпучки классифицируются грассманианом $G\Pi_M(d;\, \mathcal{T}M,\, p) \xrightarrow{\pi} M$, с помощью которого можно ввести аналоги d-плотностей $\Xi^d_p = \left(\mathrm{Ber}\, \overset{*}{\mathcal{S}}_{G\Pi}\right)^*$. Эти плотности превращаются в формы объема на таких иммерсированных супермногообразиях, касательное расслоение к которым p-инвариантно, что ведет к понятиям интегрируемости p-симметрии и к соответствующим характеристическим классам.

10. Функториальное поведение плотностей. Пусть снова φ: $N \to M$ — иммерсия супермногообразий, $d \leqslant \dim N$. Тогда, обобщая предложение 3, нетрудно определить обратное отображение d-плотностей с M на N. Действительно, d-плотность τ на M есть система форм объема, заданных на открытом множестве d-мерных касательных направлений к M; следует просто рассмотреть ту часть таких направлений, которая касается $\varphi(N)$.

Более формально, иммерсия φ: $N \to M$ определяет локально прямое вложение $\mathcal{T}N \subset \varphi^*(\mathcal{T}M)$ и потому иммерсию над M: ψ: $G_N(d;\, \mathcal{T}N) \to G_M(d;\, \mathcal{T}M)$. Эта иммерсия определена вместе с изоморфизмом пучков $\overset{d}{\mathcal{S}}_N = \psi^*\left(\overset{d}{\mathcal{S}}_M\right)$, который и индуцирует соответствующее отображение переноса.

§ 8. Формула Стокса и когомологии интегральных форм

1. Суперобласть с границей. Пусть $M^{m|n}$ — некоторое дифференцируемое ориентированное супермногообразие, $U \subset M_{\mathrm{rd}}$ — связное открытое множество с компактным замыканием, граница которого ∂U является иммерсированным ориентированным компактным замкнутым подмногообразием в M_{rd}. Введем на U естественную структуру открытого подсуперпространства в M и назовем границей суперобласти U любую иммерсию φ: $N^{m-1|n} \to M^{m|n}$ такую, что φ_{rd} определяет диффеоморфизм N_{rd} с ∂U. Все ориентации считаются согласованными следующим образом: в окрестности каждой точки границы U существует такая локальная система координат на M_{rd}, $(x^0, x^1, \ldots, x^{m-1})$, что U выделяется уравнением $x^0 < 0$, а (x^a) согласованы с ориентациями M и ∂U.

Заметим, что граница суперобласти не определяется однозначно (даже с точностью до естественного понятия изоморфизма). Локально границу можно выделять одним четным уравнением $x^0 = 0$, таким, что x^0 дополняется до локальной системы координат.

Пусть теперь $\sigma \in \Sigma_{m-1}(M)$ — интегральная форма на M. По теореме 7.5 ее можно рассматривать как плотность $\sigma \in \Xi^{m-1|n}$, определенную всюду на $G_M(m-1|n;\ \mathcal{T}M)$, и затем построить по ней форму объема $\psi^*(\sigma) \in \mathrm{Ber}\,(N)$. С другой стороны, $\delta\sigma$ есть форма объема на M, и определен интеграл $\int\limits_U \delta\sigma$, поскольку замыкание U компактно.

2. Теорема (формула Стокса). $\int\limits_N \varphi^*(\sigma) = \int\limits_U \delta\sigma.$

Доказательство. Поскольку локально интеграл Березина вычисляется как обычный интеграл от подходящей формы объема, эта формула Стокса, конечно, является следствием обычной формулы Стокса. Пользуясь аддитивностью обеих частей равенства по σ и по U, мы можем свести все к случаю $M = \mathbf{R}^{m|n}$, U задается уравнением $x^0 < 0$, $\sigma = D^*(dx)\, f \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^a}\Pi$, $f = \sum (x^m)^{\alpha_1} \ldots (x^{m+n-1})^{\alpha_n} f_\alpha$ — суперфункция с компактным носителем. Тогда

$$\delta\left[D^*(dx)\, f \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Pi\right] = -(-1)^{m+\tilde{x}^a(\tilde{f}+1)} D^*(dx) \frac{\partial f}{\partial x^a}$$

и далее

$$\int_U \delta\sigma = \begin{cases} 0 \text{ при } \tilde{x}^a = 1, \\ (-1)^{m+1} \int_U D^*(dx) \dfrac{\partial f}{\partial x^a} = \\ = (-1)^{mn+m+1} \displaystyle\int_{x^0<0} dx^0 \dots dx^{m-1} \dfrac{\partial f_{1\dots 1}}{\partial x^a} \text{ при } \tilde{x}^a = 0. \end{cases}$$

Интегрируя по x^a от $-\infty$ до ∞ при $a>0$, либо по x^0 от $-\infty$ до 0, получаем окончательно

$$\int_U \delta\sigma = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad a>0; \\ (-1)^{mn+m+1} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^{m-1}} dx^1 \dots dx^{m-1} f_{1\dots 1}(0; x^1, \dots, x^{m-1}). \end{cases}$$

Для вычисления $\varphi^*(\sigma)$, где $\varphi\colon \mathbf{R}^{m-1|n} \to \mathbf{R}^{m|n}$ — стандартная иммерсия, нужно провести в координатах конструкции теоремы 7.5. Ответ будет такой:

$$\varphi^*\left(D^*(dx) f \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}\Pi\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad a>0, \\ (-1)^{m+n-1} D^*\left(dx^1, \dots, dx^{m+n-1}\right) \varphi^*(f). \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{\partial U} \varphi^*(\sigma) = (-1)^{m+n-1+(m-1)n} \int_{\mathbf{R}^{m-1}} dx^1 \dots dx^{m+n-1} (\varphi^*(f))_{1\dots 1}.$$

Очевидно, $(\varphi^*(f))_{1\dots 1} = f_{1\dots 1}(0;\ x^1,\ \dots,\ x^{m-1})$, что завершает доказательство. ■

3. **Теорема.** а) $\mathscr{H}^i(\Sigma, M) = 0$ *при* $i \neq 0$, $\mathscr{H}^0(\Sigma, M) = \mathbf{R}$ (*постоянный пучок, ассоциированный с* $\mathbf{R}$).

б) *Можно определить каноническое умножение* $\Sigma_p M \otimes \Omega^q M \to \Sigma_{p+q} M$ *при* $p+q \leqslant m$ *со следующими свойствами* (σ — *интегральная форма,* ω — *дифференциальная*):

$$\sigma(\omega_1\omega_2) = (\sigma\omega_1)\omega_2, \quad \delta(\sigma\omega) = \delta\sigma\cdot\omega + (-1)^{\tilde{\sigma}}\sigma d\omega,$$
$$\operatorname{supp}(\sigma\omega) \subset \operatorname{supp}\sigma \cap \operatorname{supp}\omega.$$

Это умножение позволяет определить невырожденные спа-

ривания ⟨*класс* σ, *класс* ω⟩ $\mapsto \int \sigma\omega$:

$$H^{m-p}\left(\Gamma_c(\Sigma.M)\right)\times H^p(\Gamma(\Omega^{\bullet}M))\to \mathbf{R},$$

$$H^{m-p}\left(\Gamma(\Sigma.M)\right)\times H^p(\Gamma_c(\Omega^{\bullet}M))\to \mathbf{R}.$$

Набросок доказательства. Единичное сечение $\mathscr{H}^0(\Sigma.M)$ в локальных координатах представлено замкнутой интегральной формой $D^*(dx)\otimes x^m\ldots x^{m+n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\Pi\right)\ldots$ $\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\Pi\right)$ (обозначения, как в п. 1). Точность комплекса $\Sigma.M$ в остальных членах (т. е. лемму Пуанкаре для интегральных форм) можно доказать, построив гомотопию, как в § 4 гл. 5.

Умножение $\Sigma.\otimes\Omega^{\bullet}\to\Sigma.$ индуцировано, разумеется, сверткой $\mathscr{T}M\Pi\times\Omega^1_{\mathrm{odd}}M\to\mathcal{O}_M$, продолженной на симметрические степени так, чтобы выполнялось условие ассоциативности $(\sigma\omega_1)\omega_2=(\sigma\omega_1)\omega_2$. Формула совместимости с дифференциалом проверяется в локальных координатах. Из нее вытекает, что если σ, ω — циклы, то и $\sigma\omega$ — цикл, а если σ или ω — граница, то и $\sigma\omega$ — граница, так что $\int\sigma\omega$ действительно индуцирует спаривание когомологий комплексов сечений $\Sigma.$ и $\Omega^{\bullet}$, из которых один комплекс состоит из финитных форм. Невырожденность спаривания следует формально из того, что $H^p(\Gamma(\Omega^{\bullet}M))$ и $H^p(\Gamma_c(\Omega^{\bullet}M))$ конечномерны и из справедливости этого утверждения для $\mathbf{R}^{m|n}$, т. е. по существу из леммы Пуанкаре. ∎

§ 9. Супермногообразия с отмеченными формами объема. Псевдодифференциальные и псевдоинтегральные формы

1. Отмеченные формы объема. Может оказаться, что на супермногообразии M, снабженном какими-то дополнительными структурами, эти структуры определяют отмеченную форму объема v_M или, что то же (вне нулей v_M), тривиализацию обратимого пучка $\mathrm{Ber}\,M$. Тогда на M можно интегрировать функции, полагая $\int f=\int fv_M$ (если f финитна или достаточно быстро убывает), что ведет к разнообразным соотношениям двойственности. Например, на проективном пространстве $P^{m|m+1}$ имеется каноническая (с точностью до умножения на константу) такая форма.

В чисто четной геометрии формой объема Лиувилля снабжены кокасательные расслоения. Сформулируем соответствующие факты в супергеометрии.

Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на супермногообразии M, $E \overset{\pi}{\to} M$ — его тотальное пространство. Из определений следует, что имеется каноническая точная последовательность на E:

$$0 \to \pi^*(\mathcal{E}) = \mathcal{T}E/M \to \mathcal{T}E \xrightarrow{d\pi} \pi^*(\mathcal{T}M) \to 0,$$

откуда, дуализируя и применяя Π, находим

$$(\operatorname{Ber} E)^* = \pi^*(\operatorname{Ber} \Pi\mathcal{E}^* \otimes \operatorname{Ber} \Pi\mathcal{T}^*M).$$

Для $\mathcal{E} = \mathcal{T}M$, $\mathcal{T}M\Pi$, $\mathcal{T}^*M = \Omega^1_{\mathrm{ev}}M$, $\Pi\mathcal{T}^*M = \Omega^1_{\mathrm{odd}}M$ будем обозначать соответствующие тотальные пространства символами TM, $TM\Pi$, T^*M, ΠT^*M. Применяя к этим пространствам предыдущее замечание, получаем следующий факт.

2. Предложение. а) *На* T^*M *и* $TM\Pi$ *имеются канонические формы объема.*

б) *На* TM *и* ΠT^*M *пучок форм объема канонически отождествляется с* $\pi^*(\operatorname{Ber} M)^2$. *В частности, если на* M *имеется отмеченная форма объема, то то же верно для* TM *и* ΠT^*M. ■

Следствие. *Отмеченные формы объема имеются на супермногообразиях* $T(T^*M)$, $T(TM\Pi)$, $\Pi T^*(T^*M)$, $\Pi T^*(TM\Pi)$. ■

3. Псевдодифференциальные формы. Согласно определению дифференциальные формы на M можно рассматривать как функции на $TM\Pi$. Мы уже установили, что на $TM\Pi$ имеется каноническая форма объема v_M, поэтому любой дифференциальной форме ω на M можно поставить в соответствие интеграл $\int\limits_M \omega = \int\limits_{TM\Pi} \omega v_M$. Однако, вообще говоря, он является лишь обобщенной функцией на M (или $TM\Pi$), поскольку при $\dim M = m|n$, $n > 0$, слоями проекции $TM\Pi \to M$ являются некомпактные суперпространства $\mathbf{R}^{n|m}$, а $\operatorname{supp} v_M = TM\Pi$ (это будет очевидно ниже из координатных вычислений). Форма же ω полиномиальна вдоль слоев $\mathbf{R}^{n|m}$, координатами вдоль которых являются дифференциалы dx, $\tilde{x} = 1$, поэтому она, как правило, неинтегрируема. Общая функция на $TM\Pi$ может и неполиномиально зависеть от четных dx (точнее, от $\pi^*(dx)$), например, как

$\exp\left(-(dx^{m+1})^2 - \ldots - (dx^{m+n})^2\right)$, что может обеспечить ее интегрируемость. Это мотивирует следующее определение.

4. Определение. а) *Псевдодифференциальной формой* на супермногообразии M называется локальное сечение пучка $\mathcal{O}_{TM\Pi}$.

б) Псевдодифференциальная форма ω на многообразии M называется *интегрируемой*, если она определена на всем $TM\Pi$ и интеграл $\int \omega v_M$ абсолютно сходится. ■

Мы подразумевали, что M ориентировано; тогда на $TM\Pi$ можно очевидным образом построить согласованную ориентацию.

5. Гомологическое векторное поле на $TM\Pi$. На $TM\Pi$ имеется нечетное глобальное векторное поле $\mathcal{D}$ со следующим свойством: если ω — любая дифференциальная форма на M, рассматриваемая как функция на $TM\Pi$, то $\mathcal{D}\omega = d\omega$. Очевидно, $\mathcal{D}^2 = 0$.

6. Псевдоинтегральные формы. Используя каноническую форму объема w_M на T^*M, можно аналогичным образом интегрировать функции на T^*M, в частности сечения пучка $S_{\mathcal{O}_M}\mathcal{T}M)$ на M.

7. Вычисления в координатах. Пусть (x^a) — локальная система координат на M. С ней связаны тривиализации пучков $\mathcal{T}M$ и $\Pi\mathcal{T}^*M$ посредством сечений $\frac{\partial}{\partial x^a}$ и dx^a соответственно и, стало быть, отмеченные атласы на T^*M, $TM\Pi$, а также ΠT^*M и TM. Напишем явно обозначения и правила преобразования соответствующих систем координат при замене $y^a = y^a(x)$ на M:

$$T^*M\colon\ (x^a,\ X_a),\quad \left(y^a = y^a(x),\ Y_a = \sum_b \frac{\partial x^b}{\partial y^a} X_b = \sum_b \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{ab} X_b\right);$$

$$\Pi T^*M\colon\ (x^a,\ X_a\Pi),\quad \left(y^a = y^a(x),\ Y_a\Pi = \sum_b \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{ab} X_b\Pi\right);$$

$$TM\Pi\colon\ (x^a,\ \ X^a),\ \left(y^a = y^a(x),\ Y^a = \sum_b X^b \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{ba}\right);$$

$$TM\colon\ (x^a,\ \Pi X^a),\ \left(y^a = y^a(x);\quad \Pi Y^a = \sum_b \Pi X^b \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{ba}\right).$$

Канонические формы объема:

$$T^*M\colon\ w_M = D^*\left(dx^a;\ dX_a\right),$$
$$TM\Pi\colon\ v_M = D^*\left(dx^a;\ dX^a\right).$$

В действительности, как и в чисто четном случае, на T^*M и ΠT^*M имеются канонические «симплектические» формы, четная и нечетная соответственно:

$$T^*M\colon\ \omega = \sum (-1)^{\tilde{x}^a} dx^a\, dX_a,$$
$$\Pi T^*M\colon\ \omega = \sum (-1)^{\tilde{x}^a} dx^a d\,(X_a\Pi).$$

Проверим независимость от координат, скажем, первой из них:

$$\sum_a (-1)^{\tilde{y}^a} dy^a dY_a =$$
$$= \sum_a (-1)^{\tilde{y}^a} \left(\sum_b dx^b \frac{\partial y^a}{\partial x^b}\right) \left(\sum_c d\left(\frac{\partial x^c}{\partial y^a}\right) X_c + {} \right.$$
$$\left. + \sum_c (-1)^{\tilde{x}^a + \tilde{x}^b} \frac{\partial x^c}{\partial y^a}\, dX_b\right).$$

Так как $\sum_a \dfrac{\partial y^a}{\partial x^b}\, \dfrac{\partial x^c}{\partial y^a} = \delta_b^c,$ вторая сумма в правой скобке вместе с внешним суммированием даст

$$\sum_b (-1)^{\tilde{x}^b} dx^b dX_b.$$

Оставшаяся часть обращается в нуль:

$$\sum_a (-1)^{\tilde{y}^a} dy^a d\left(\frac{\partial x^c}{\partial y^a}\right) = -d\left(\sum_a dy^a \frac{\partial x^c}{\partial y^a}\right) = -d\left(dx^c\right) = 0.$$

Предложение 7.8 показывает тогда, что на T^*M имеются канонические квадраты плотностей всех размерностей.

§ 10. Супералгебры Ли векторных полей и конечномерные простые супералгебры Ли

1. Алгебры векторных полей. Цель этого параграфа — описать без доказательств классификационную теорию простых конечномерных комплексных супералгебр Ли.

Главный класс естественно возникающих супералгебр Ли — это векторные поля на супермногообразиях. Пусть M — некоторое супермногообразие, для конкретности комплексное. Положим

$$w(M) = H^0(M, \mathcal{T}M).$$

Векторные поля действуют на сечения естественных пучков на M с помощью производной Ли; при этом коммутант переходит в коммутант. Поэтому множество векторных полей, сохраняющих (переводящих в нуль) фиксированное сечение естественного пучка, является подалгеброй Ли. Особую роль в этой конструкции играют формы объема $v \in H^0(M, \operatorname{Ber} M)$ и «метрики» $\omega \in H^0(M, \Omega^1 M \otimes \Omega^1 M)$ (где $\Omega^1 = \Omega^1_{\text{ev}}$ или Ω^1_{odd}), подчиненные условиям симметрии, которые в § 5 гл. 3 обозначались типами $\mathrm{O\,Sp}$, $\Pi\,\mathrm{Sp}$ и Π-инверсными им. Соответствующие алгебры Ли обозначим следующими символами:

$$s(M, v) = \{X \in w(M) \mid L_X v = 0\},$$
$$h(M, \omega) = \{X \in w(M) \mid L_X \omega = 0\},$$

где L_X — производная Ли вдоль поля X.

Вообще говоря, эти алгебры Ли не обязаны быть конечномерными. Конечномерности можно добиться, потребовав, чтобы M было компактным. Другой способ — положить $M = \mathbf{C}^{m|n}$ с учетом линейной структуры, которая позволяет определить на полиномиальных полях из $w(\mathbf{C}^{m|n})$ градуировку: в координатах

$$w_i(\mathbf{C}^{m|n}) = \left\{ \sum_{a=1}^{m+n} f^a \frac{\partial}{\partial x^a} \,\middle|\, f^a \text{ — однородные многочлены степени } i+1 \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что $[w_i, w_j] \subset w_{i+j}$; в частности, $w_0(\mathbf{C}^{m|n})$ образуют супералгебру Ли. Пусть V — суперпространство линейных функций на $\mathbf{C}^{m|n}$; если $X \in w_0(\mathbf{C}^{m|n})$, то $L_X V \subset V$, и сопоставление $X \mapsto L_X$ определяет изоморфизм

$$w_0(\mathbf{C}^{m|n}) \rightleftarrows gl(V) = gl(m \mid n).$$

Пусть форма объема v выбрана в виде $D^*(dx^a)$ и $s_0(\mathbf{C}^{m|n}, v) = s(\mathbf{C}^{m|n}, v) \cap w_0$. Тогда

$$s_0(\mathbf{C}^{m|n}, v) = sl(V) = sl(m|n),$$

ибо, как нетрудно убедиться,

$$L_X D^*(dx^a) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{str} L_X = 0$$

(суперслед относится к оператору L_X: $V \to V$). С помощью суперметрик определяются супералгебры Ли классического типа:

$$osp(m \mid 2n) = h_0\left(\mathbf{C}^{2n|m};\ \sum_{i=1}^{n} dx^i dx^{i+n} + \sum_{j=1}^{m} (d\xi^j)^2,\ d = d_{\text{odd}}\right),$$

$$\pi sp(m \mid m) = h_0\left(\mathbf{C}^{m|m};\ \sum_{i=1}^{m} dx^i d\xi^i\right).$$

Если на V имеется нечетная инволюция p: $V \to V$, $p^2 = 1$, то коммутирующие с ней векторные поля образуют супералгебру Ли, не имеющую четного аналога:

$$\pi(m|m) = \{X \in gl(m|m) \mid [L_X, p] = 0\}.$$

Наконец, при $M = \mathbf{C}^{0|n}$ нет необходимости заменять w на w_0, чтобы получить конечномерные супералгебры Ли, так что мы можем рассмотреть также

$$w(0|n);\quad s(0|n, v);\quad h(0|n, \omega).$$

2. Классификация Картана. Напомним результат картановской классификации конечномерных простых алгебр Ли.

Алгебра Ли g называется полупростой, если она неабелева и не имеет нетривиальных разрешимых идеалов; простой, если она не имеет никаких нетривиальных идеалов. Всякая конечномерная полупростая алгебра является прямой суммой простых.

Всякая простая алгебра Ли либо является членом одной из классических серий sl, O, sp, либо изоморфна одной из исключительных простых алгебр Ли G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, определение которых более сложно и требует привлечения корневой техники, или линейной алгебры над кватернионами и октавами.

Члены классических серий sl, o, sp просты и попарно неизоморфны, за небольшим числом исключений. Точнее, простые алгебры Ли содержатся по одному разу в следующей таблице, где указаны их альтернативные обозначения:

$sl(n+1)$	$o(2n+1)$	$sp(2n)$	$o(2n)$
$A_n,\ n\geqslant 1$	$B_n,\ n\geqslant 2$	$C_n,\ n\geqslant 3$	$D_n,\ n\geqslant 3$

«Случайные» изоморфизмы: $o(3)=sl(2)$; $sp(2)=sl(2)$; $sp(4)=o(5)$; $o(4)=sl(2)\times sl(2)$. Разделение серии o на две части определяется, как известно, разницей корневых структур: диаграмма Дынкина серии D содержит развилку, в отличие от серии B.

3. Классификация простых супералгебр Ли. Как показал Кац [80], простые комплексные конечномерные супералгебры Ли допускают классификацию, параллельную картановской.

Точнее говоря, всякая такая супералгебра Ли либо является простой алгеброй Ли, либо изоморфна одной из описанных выше супералгебр Ли картановских серий sl, osp, πsp, π, w, s; h либо отличается от элемента такой серии простой конструкцией, вроде факторизации по центру; либо, наконец, принадлежит к одному из исключительных типов, обозначаемых $D(2|1,\ \alpha)$ (однопараметрическое семейство), $F(4)$, $G(3)$.

Ниже мы по очереди опишем все картановские супералгебры Ли g с некоторыми подробностями, придерживаясь следующего плана: реализация в фундаментальном представлении; переход к простой супералгебре, когда это необходимо; размерность; структура g_0 и представления g_0 на g_1; $\mathbf{Z}$-градуировки; «случайные» изоморфизмы с ранее описанными супералгебрами; дополнительные сведения.

4. Серия A. Положим

$$A(m\,|\,n)=\begin{cases} sl(m+1\,|\,n+1) & \text{при } m\neq n;\ m,n\geqslant 0;\\ sl(n+1|n+1)/\mathbf{C}E_{n+1|n+1} & \text{при } m=n\geqslant 1.\end{cases}$$

Матрицы, пропорциональные единичной в $gl(n+1|n+1)$, имеют нулевой след и потому попадают в $sl(n+1|n+1)$; кроме того, они, очевидно, образуют идеал. После факторизации по нему супералгебра Ли становится простой. Очевидно,

$$\dim A(m\,|\,n)=\begin{cases} (m+1)^2+(n+1)^2-1\,|\,(m+1)(n+1) & \text{при } m\neq n,\\ 2(n+1)^2-2\,|\,(n+1)^2 & \text{при } m=n.\end{cases}$$

Далее:

$$A(m\,|\,n)_0=\begin{cases}A_m\oplus A_n\oplus \mathbf{C} & \text{при} \quad m\neq n,\\ A_n\oplus A_n & \text{при} \quad m=n,\end{cases}$$

а представление $A(m|n)_0$ на $A(m|n)_1$ есть $f_m\otimes f_n'\otimes \mathbf{C}$ или $f_n\otimes f_n$ соответственно. Здесь и ниже символом f_n мы обозначаем фундаментальные n-мерные представления соответствующих слагаемых четной части супералгебры Ли.

Алгебры $A(n|n)$ имеют нулевую форму Киллинга $(a,b)=\operatorname{str}(\operatorname{ad}a\operatorname{ad}b)$; у остальных алгебр серии A она невырождена.

«Случайные» изоморфизмы: $A(m\,|\,n)\simeq A(n\,|\,m)$; инвариантное объяснение состоит в существовании канонического изоморфизма $gl(V)\to gl(\Pi V)$: $a\mapsto a^{\Pi}$.

5. Серия B. Положим

$$B(m|n)=osp(2m+1|2n),\quad m\geqslant 0,\ n>0.$$

Имеем

$$B(m\,|\,n)_0=B_m\oplus C_n,\qquad B(m\,|\,n)_1=f_{2m+1}\otimes f_{2n}',$$

$$\dim B(m\,|\,n)=2m^2+m+2n^2+n\,|\,4mn+2n.$$

Все эти супералгебры Ли простые и не изоморфны с описанными выше супералгебрами серии A.

6. Серия C. Положим

$$C(n)=osp(2|2n-2),\ n\geqslant 2.$$

Имеем

$$C(n)_0=C_{n-1}\oplus \mathbf{C},\qquad C(n)_1=f_{2n-2}\otimes \mathbf{C},$$

$$\dim C(n)=2n^2-3n+2|4n-4.$$

Случайный изоморфизм:

$$A(1|0)=sl(2|1)=osp(2|2)=C(2).$$

Все супералгебры серии C простые.

7. Серия D. Положим

$$D(m|n)=osp(2m|2n),\quad m\geqslant 2,\quad n>0.$$

Имеем

$$D(m\,|\,n)_0=D_m\oplus C_n,\qquad D(m\,|\,n)_1=f_{2m}\otimes f_{2n}',$$

$$\dim D(m\,|\,n)=2m^2-m+2n^2-n\,|\,4mn.$$

Все супералгебры серии D простые; случайных изоморфизмов нет.

Опишем еще реализацию супералгебр серий B, C, D (т. е. osp) в терминах тензорной алгебры фундаментального представления. Пусть $T = T_0 \oplus T_1$, $\dim T = m|n$; $(,)_0$ и $(,)_1$ — соответственно невырожденная симметричная форма на T_0 и на T_1. В формулах ниже мы, как всегда, пользуемся правилом знаков, так что $\Lambda^2 V_1 = S^2(\Pi V_1)$ и т. п. Имеют место изоморфизмы

$$osp(m|n) = (\Lambda^2 T_0 \oplus \Lambda^2 T_1) \oplus (T_0 \otimes T_1)$$

со следующим законом композиции:

$$[ab,\ c] = (a,\ c)_0 b - (b,\ c)_0 a, \quad ab \in \Lambda^2 T_0,\ c \in T_0;$$
$$[ab,\ c] = (a,\ c)_1 b + (b,\ c)_1 a, \quad ab \in \Lambda^2 T_1,\ c \in T_1;$$
$$[ab,\ cd] = [ab,\ c]d + c[ab,\ d], \quad ab,\ \ cd \in \Lambda^2 T_0 \ \text{ или } \ \Lambda^2 T_1;$$
$$[a \otimes c,\ b \otimes d] = (a,\ b)_0 cd + (c,\ d)_1 ab, \ a \otimes c,\ b \otimes d \in T_0 \otimes T_1.$$

8. Серия P. Положим

$$P(n) = \pi sp(n+1|n+1) \cap sl(n+1|n+1), \ n \geqslant 2.$$

Имеем

$$P(n)_0 = A_n, \quad P(n)_1 = \Lambda^2 f^*_{n+1} \otimes S^2 f_{n+1},$$
$$\dim P(n) = n^2 + 2n \,|\, (n+1)^2.$$

Случайных изоморфизмов с ранее построенными алгебрами нет.

9. Серия Q. Супералгебра Ли $\pi(n+1|n+1)$ в естественном базисе реализуется матрицами формата

$$g = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right), \quad a \in gl(n+1\,|\,n+1).$$

На таких матрицах определена операция «нечетного следа», равная нулю на коммутаторах:

$$\operatorname{otr} g = \operatorname{tr} b,$$
$$\operatorname{otr}[g,\ g'] = \operatorname{tr}[a,\ b'] - \operatorname{tr}[a',\ b] = 0.$$

Поэтому ядро otr является супералгеброй Ли; кроме того, эта супералгебра содержит нетривиальный идеал C, состоящий из кратных единичной матрицы. Окончательно, положим

$$Q(n) = \left\{\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right) \,\middle|\, a \in gl(n+1),\ b \in sl(n+1)\right\} \Big/ C, \quad n \geqslant 2.$$

Имеем

$$Q(n)_0 = A_n, \quad Q(n)_1 = \operatorname{ad} A_n,$$
$$\dim Q(n) = n^2 + 2n | n^2 + 2n.$$

Все эти супералгебры простые; случайных изоморфизмов с описанными выше алгебрами нет.

10. Исключительные супералгебры классического типа. Все описанные простые супералгебры $A - D$, P, Q обладают следующим свойством: их четная часть полупроста, а представление четной части на нечетной вполне приводимо. Имеется еще три типа простых супералгебр с этим свойством: $F(4)$, $G(3)$ и $D(2|1, \alpha)$. Приведем некоторые сведения о них:

$$F(4)_0 = B_3 \oplus A_1, \quad F(4)_1 = \operatorname{spin}(7) \otimes f_2, \quad \dim \operatorname{spin}(7) = 8;$$
$$\dim F(4) = 24|16;$$
$$G(3)_0 = G_2 \oplus A_1, \quad G(3)_1 = f_7 \otimes f_3;$$
$$\dim G(3) = 10|21;$$
$$D(2|1, \alpha)_0 = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad D(2|1, \alpha)_1 = f_2 \otimes f_2 \otimes f_2,$$
$$\dim D(2|1, \alpha) = 9|8.$$

11. Серия W. Положим

$$W(n) = w(C^{0|n}) = \left\{ \sum_{a=1}^{n} f^a(\xi^1, \ldots, \xi^n) \frac{\partial}{\partial \xi^a}, \quad f^a \in \mathbf{C}[\xi^1, \ldots, \xi^n] \right\},$$
$$\dim W(n) = n2^{n-1} | n2^{n-1}.$$

Алгебра $W(n)$ проста при $n \geqslant 2$ и не изоморфна описанным ранее при $n \geqslant 3$; случайный изоморфизм:

$$W(2) = C(2) = A(1|0).$$

Естественно считать, что $W(n)$ является «искривленной» версией $gl(0|n)$; она действует на $\mathbf{C}^{0|n}$ инфинитезимальными автоморфизмами, не обязанными сохранять линейную структуру.

Алгебра Ли $W(n)_0$ не является полупростой, ее полупростой фактор есть $gl(n)$.

12. Серии S и $\widetilde{S}$. Невырожденная форма объема на $C^{0|n}$ имеет вид $f(\xi^1, \ldots, \xi^n) D^*(d\xi^1, \ldots, d\xi^n)$, $f(0) \neq 0$. Можно показать, что при нечетном n автоморфизмами $\mathbf{C}^{0|n}$ такую форму можно привести к виду $D^*(d\xi^1, \ldots, d\xi^n) = v$, а при четном n — либо к этому виду, либо к виду $\tilde{v}_t = (1 + t\xi^1 \ldots \xi^n) \times \times D^*(d\xi^1, \ldots, d\xi^n)$. Положим

$$\left.\begin{aligned} S(n) &= \{X \in W(n) \mid \Delta_r(v \otimes X) = 0\}, \\ \tilde{S}(n) &= \{X \in W(n) \mid \Delta_r(\tilde{v}_1 \otimes X) = 0\}, \end{aligned}\right. \qquad n \equiv 0 \bmod 2,$$

где правое действие $\Delta_r(v \otimes X)$ определено в § 5. Эти алгебры просты при $n \geqslant 3$, полупростая часть $S(n)_0$ и $\tilde{S}(n)_0$ изоморфна $sl(n)$, размерности равны $(n-1)2^{n-1} | (n-1)2^{n-1} + 1$. Случайный изоморфизм:

$$S(3) = P(2).$$

13. Серия *H*. Положим $\omega = (d\xi^1)^2 + \ldots + (d\xi^n)^2 \in \Omega^2_{\text{odd}} C^{0|n}$, и далее

$$\bar{H}(n) = \{X \in W(n),\ L_X\omega = 0\}, \quad H(n) = [\bar{H}(n),\ \bar{H}(n)].$$

Алгебра $H(n)$ проста **при** $n \geqslant 4$; размерность ее равна $2^{n-1} | 2^{n-1} - 2$. Случайный изоморфизм:

$$H(4) = A(1|1).$$

Полупростая часть $H(n)$ изоморфна $so(n)$.

Описанные в пп. 4—13 простые конечномерные супералгебры Ли над **C** исчерпывают все такие алгебры с точностью до изоморфизма.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 4

Систематическая теория гладких супермногообразий с разных точек зрения изложена в больших работах Костанта [81] и Лейтеса [18]. Суперпространства можно рассматривать в разных геометрических категориях; принятое нами определение аналитических суперпространств сформулировано Делинем. Теорема Фробениуса и дифференциальные уравнения на супермногообразиях изучены в работе Шандера [38]. Теория интегрирования форм объема Березина обобщена Бернштейном и Лейтесом [6], [7], им же принадлежит формула Стокса в супергеометрии. Суперпространства флагов построены здесь стандартным методом покрытий (относительными) большими клетками. Из-за того что большинство суперграссманианов не проективно, нужно обобщать на суперслучай технику доказательств, не использующую проективности. Теорема двойственности была недавно доказана Пенковым с помощью теории D-модулей на супермногообразиях [91]. По поводу геометрии G-структур на суперпространствах см. работу Шварца [100].

Глава 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ СУПЕРСИММЕТРИИ И СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Содержание этой главы — несколько основных конструкций теории поля, использующих понятие суперпространства. В § 1 описано суперпространство Минковского *M*. Если исходить из супертвисторов, то компактная комплексная версия *M* естественно реализуется как некоторое пространство флагов. Геометрия этого плоского случая, отвечающая минимальному ($N = 1$) числу нечетных координат, после надлежащего искривления превращается в геометрию простой супергравитации по Огиевецкому — Сокачеву, которой посвящен § 7. В § 2 на простейшем примере скалярных суперполей объяснены некоторые основные понятия суперсимметричных теорий поля, используемые в физической литературе. В § 3 изучаются связи и динамические уравнения для суперполей Янга — Миллса на основе идеи Виттена трактовать их как уравнения интегрируемости вдоль световых супергеодезических. В § 4 изложен метод построения решений суперсимметричных уравнений Янга — Миллса, использующий преобразование Пенроуза в супергеометрии; относящиеся к нему координатные вычисления проделаны в § 5. В § 6 классифицированы другие флаговые суперпространства, подложкой которых служит модель Пенроуза. Они обладают некоторыми экзотическими свойствами, но могут быть полезными для понимания таких конструкций, как мультиплет Файе — Сониуса, и других вопросов расширенной суперсимметрии и супергравитации.

§ 1. Супертвисторы и суперпространство Минковского

1. Супертвисторы. В этом параграфе T обозначает комплексное линейное суперпространство размерности $4|N$ — пространство супертвисторов. Положим $M = F(2|0,\ 2|N;\ T)$. Это супераналитическое многообразие является компактной комплексной моделью N-расширенного суперпространства Минковского. Само это расширенное суперпространство является вещественным супермногообразием, пространством неподвижных точек большой клетки M относительно подходящей вещественной структуры. Другая вещественная структура приводит к евклидовой версии суперпространства.

Цель параграфа — изучить геометрию M. Поскольку $M_{\rm rd} = G(2|0, T_0)$, подложка M является квадрикой Плюккера, подробно разобранной в § 3 гл. 1. Поэтому здесь акцент сделан на специальных свойствах, связанных с наличием нечетных координат.

2. Правое и левое суперпространства. Положим $M_l = G(2|0; T)$, $M_r = G(2|N; T) = G(2|0; T^*)$. Суперпространство M обладает двумя каноническими проекциями

$$M_l \xleftarrow{\pi_l} M \xrightarrow{\pi_r} M_r.$$

Над M_l и M_r пространство M представляется в виде относительных грассманианов:

$$M = G_{M_l}(0|N; (\widetilde{\mathcal{S}}_l^{2|N})^*) = G_{M_l}(2|0; \widetilde{\mathcal{S}}_l^{2|N}),$$
$$M = G_{M_r}(2|0; \mathcal{S}_r^{2|N}) = G_{M_r}(0|N; (\mathcal{S}_r^{2|N})^*).$$

Здесь $\mathcal{S}_l$, $\mathcal{S}_r$ — тавтологические пучки на M_l, M_r соответственно. См. п. 1.1.18 относительно принципов обозначений. В частности, π_l и π_r — субмерсии относительной размерности $2|0 \times 0|N = 0|2N$. Поэтому комплексные размерности этих аналитических супермногообразий таковы:

$$\dim_{\rm C} M_l = \dim_{\rm C} M_r = 2|0 \times 2|N = 4|2N; \quad \dim_{\rm C} M = 4|4N.$$

3. Структура касательного пучка. Положим

$$\mathcal{T}_l M = \mathcal{T} M/M_r, \quad \mathcal{T}_r M = \mathcal{T} M/M_l.$$

По теореме 5.3.11 имеем канонические изоморфизмы

$$\mathcal{T}_l M = \mathcal{H}om(\mathcal{S}^{2|0}, \mathcal{S}^{2|N}/\mathcal{S}^{2|0}) = \mathcal{H}om(\widetilde{\mathcal{S}}^{2|N}/\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}, (\mathcal{S}^{2|0})^*),$$
$$\mathcal{T}_r M = \mathcal{H}om(\mathcal{S}^{2|N}/\mathcal{S}^{2|0}, (\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^*) = \mathcal{H}om(\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}, \widetilde{\mathcal{S}}^{2|N}/\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}),$$

где $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$ — тавтологические пучки на M. В частности, композиция гомоморфизмов доставляет естественное билинейное отображение

$$\mathcal{T}_l M \otimes \mathcal{T}_r M \xrightarrow{a} (\mathcal{S}^{2|0})^* \otimes (\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^*.$$

Точную формулу для a см. ниже, в п. 7.

С другой стороны, $\mathcal{T}_l M$ и $\mathcal{T}_r M$ являются подпучками супералгебр Ли в $\mathcal{T} M$, и форма Фробениуса между $\mathcal{T}_l M$ и $\mathcal{T}_r M$, т. е. суперкоммутатор по модулю $\mathcal{T}_l M + \mathcal{T}_r M$, определяет отображение

$$[\ ,\ ] : \mathcal{T}_l M \otimes \mathcal{T}_r M \xrightarrow{b} \mathcal{T} M / (\mathcal{T}_l M + \mathcal{T}_r M) = \mathcal{T}_0 M.$$

4. П р е д л о ж е н и е. а) *Сумма* $\mathcal{T}_l M + \mathcal{T}_r M$ *в* $\mathcal{T} M$ *является прямой, и* $\mathcal{T}_l M \oplus \mathcal{T}_r M$ — *локально-прямой подпучок ранга* $0|4N$.

б) *Существует единственный изоморфизм* $\mathcal{T}_0 M = (\mathcal{S}^{2|0})^* \otimes \otimes (\tilde{\mathcal{S}}^{2|0})^*$, *относительно которого формы* a *и* b, *определенные в предыдущем пункте, совпадают. При редукции нечетных координат этот изоморфизм переходит в стандартный изоморфизм* $\mathcal{T} M_{\mathrm{rd}} = (\mathcal{S}^{2|0}_{\mathrm{rd}})^* \otimes (\tilde{\mathcal{S}}^{2|0}_{\mathrm{rd}})^*$. ■

Мы установим это утверждение с помощью вычислений в стандартных координатах на большой клетке M.

5. **Координаты в T и T^*.** Дополняя нечетными функциями координаты в обычных твисторных пространствах из § 3 гл. 1, положим

$$T\colon\ (z_\alpha, z^{\dot\beta}, \zeta^j), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad j = 1, \ldots, N;$$
$$T^*\colon\ (w^\alpha, w_{\dot\beta}, \omega_j).$$

Каноническую билинейную форму (как элемент $T^* \otimes T$) будем записывать в виде

$$\langle (z, \zeta), (w, \omega) \rangle = z_\alpha w^\alpha - z^{\dot\beta} w_{\dot\beta} + 2i\zeta^j \omega_j$$

(подразумевается суммирование по повторяющимся индексам; множитель $2i = 2\sqrt{-1}$ поставлен для согласования с принятыми в физической литературе соглашениями. Конечно, это важно лишь при учете вещественной структуры).

Выбор большой клетки в M_{rd} и ее отождествление с $\mathbb{C}^{4|4N}$ определяет четыре подпространства в T-компоненте тавтологического флага в начале координат и в вершине бесконечно удаленного конуса, которые задаются следующими уравнениями:

$$\mathcal{S}(0)^{2|0}\colon\ z^{\dot\beta} = 0,\ \zeta^j = 0; \qquad \mathcal{S}(\infty)^{2|N}\colon\ z_\alpha = 0;$$
$$\mathcal{S}(0)^{2|N}\colon\ z^{\dot\beta} = 0; \qquad \mathcal{S}(\infty)^{2|0}\colon\ z_\alpha = 0,\ \zeta^j = 0.$$

6. Координаты больших клеток в M_l и M_r. Записывая их в общем формате матриц Z_I, как в § 3 гл. 3, имеем

$$M_l:\quad \begin{array}{c|cccc|ccc|}
s^0 & 1 & 0 & x_l^{0\dot{0}} & x_l^{0\dot{1}} & \theta_l^{01} & \ldots & \theta_l^{0N} \\ \hline
s^1 & 0 & 1 & x_l^{1\dot{0}} & x_l^{1\dot{1}} & \theta_l^{11} & \ldots & \theta_l^{1N} \\ \hline
 & z_0 & z_1 & z^{\dot{0}} & z^{\dot{1}} & \zeta^1 & \ldots & \zeta^N
\end{array} = \left(\delta^{\alpha\beta} \,\middle|\, x_l^{\alpha\dot{\beta}} \,\middle|\, \theta_l^{\alpha j}\right)$$

и аналогично

$$M_r:\quad \begin{array}{c|cccc|ccc|}
s^{\dot{0}} & x_r^{\dot{0}0} & x_r^{\dot{0}1} & 1 & 0 & \theta^{\dot{0}}_{r1} & \ldots & \theta^{\dot{0}}_{rN} \\ \hline
s^{\dot{1}} & x_r^{\dot{1}0} & x_r^{\dot{1}1} & 0 & 1 & \theta^{\dot{1}}_{r1} & \ldots & \theta^{\dot{1}}_{rN} \\ \hline
 & w^0 & w^1 & w_{\dot{0}} & w_{\dot{1}} & \omega_1 & \ldots & \omega_N
\end{array} = \left(x_r^{\dot{\beta}\alpha} \,\middle|\, \delta^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \,\middle|\, \theta^{\dot{\beta}}_{rj}\right)$$

Расстановка индексов приспособлена к нумерации координат в T, T^*, первые индексы нумеруют строчки матрицы. Напомним, что $\mathcal{S}_l(x_l, \theta_l)$, $\mathcal{S}_r(x_r, \theta_r)$ как модули сечений $\mathcal{O}_{M_l} \otimes T$, $\mathcal{O}_{M_r} \otimes T$ над большой клеткой порождены строками первой и второй матриц соответственно, которые мы обозначили s^α и $s^{\dot{\beta}}$

7. Координаты большой клетки в M. $(2|0,\ 2|N)$-флаг в T — это то же, что пара $2|0$-подпространств в T и T^*, ортогональных относительно формы $\langle\ \rangle$. Условие ортогональности $\mathcal{S}_l(x_l, \theta_l)$ и $\mathcal{S}_r(x_r, \theta_r)$ состоит из четырех соотношений:

$$\delta^{\alpha\gamma} x_r^{\dot{\beta}\gamma} - x_l^{\alpha\dot{\gamma}} \delta^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} + 2i\theta_l^{\alpha j}\theta^{\dot{\beta}}_{rj} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \quad \dot{\beta} = \dot{0}, \dot{1}.$$

Будем считать x_l, x_r, θ_l, θ_r функциями на M, подняв их с M_l, M_r посредством $\overset{*}{\pi}_l$, $\overset{*}{\pi}_r$. Положим

$$x^{\alpha\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\left(x_l^{\alpha\dot{\beta}} + x_r^{\dot{\beta}\alpha}\right).$$

Переписав соотношения ортогональности в виде

$$x_l^{\alpha\dot{\beta}} - x_r^{\dot{\beta}\alpha} = 2i\theta_l^{\alpha j}\theta^{\dot{\beta}}_{rj},$$

получаем, что в качестве стандартной системы координат на большой клетке M можно взять $\left(x^{\alpha\dot{\beta}},\ \theta_l^{\alpha j},\ \theta^{\dot{\beta}}_{rj}\right)$. Четные координаты левого и правого (киральных, в физической терминологии) суперпространств имеют вид

$$x_l^{\alpha\dot\beta} = x^{\alpha\dot\beta} + i\theta_l^{\alpha j}\theta_{rj}^{\dot\beta},$$

$$x_r^{\dot\beta\alpha} = x^{\alpha\dot\beta} - i\theta_l^{\alpha j}\theta_{rj}^{\dot\beta}.$$

8. **Базисы $\mathcal{T}_lM$ и $\mathcal{T}_rM$.** Сечениями $\mathcal{T}_lM$ (соответственно $\mathcal{T}_rM$) являются супердифференцирования на большой клетке M, которые обращают в нуль (x_r, θ_r) (соответственно (x_l, θ_l)). Нетрудно убедиться, что базис таких сечений задается следующим набором векторных полей, которые в физической литературе иногда называются «ковариантными производными»:

$$\mathcal{T}_lM\colon D_{l\alpha j} = \frac{\partial}{\partial\theta_l^{\alpha j}} + i\theta_{rj}^{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}, \quad \alpha = 0, 1, \quad j = 1, \ldots, N,$$

$$\mathcal{T}_rM\colon\ D^j_{r\dot\beta} = \frac{\partial}{\partial\theta_{rj}^{\dot\beta}} + i\theta_l^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}, \quad \dot\beta = \dot0, \dot1, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Отсюда видно, что сумма $\mathcal{T}_lM + \mathcal{T}_rM$ прямая, а векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}$ образуют базис пучка ранга $4|0$, дополняющего ее до $\mathcal{T}M$. Далее, прямое вычисление коммутатора дает

$$\left[D_{l\alpha j}, D^k_{r\dot\beta}\right] = 2i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}\,\delta_j^k.$$

9. Доказательство предложения 4. Нам осталось сравнить билинейные отображения a и b. Пусть X_l, X_r, s, t — локальные сечения пучков $\mathcal{T}_lM$, $\mathcal{T}_rM$, $\mathcal{S}^{2|0}$, $\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}$ соответственно. Отображение a определим любой из двух формул, эквивалентность которых будет проверена ниже:

$$a(X_l\otimes X_r)(s\otimes t) = (-1)^{\tilde X_l\tilde X_r}\langle X_rX_ls, t\rangle =$$
$$= (-1)^{\tilde s(\tilde X_l+\tilde X_r)}\langle s, X_lX_rt\rangle.$$

Среднее выражение интерпретируется так: X_ls есть сечение $\mathcal{S}^{2|N}/\mathcal{S}^{2|0}$, которое получается покоординатным дифференцированием s, выраженным в базисе T, после этого X_rX_ls есть результат аналогичного дифференцирования X_ls в базисе, поднятом с M_r (на большой клетке можно снова считать, что это исходный базис T), X_rX_ls — сечение $(\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^*$.

Применим эту формулу к $D_{l\alpha j}$, $D^k_{r\dot\beta}$, s^γ, $s^{\dot\delta}$. Имеем

$$D^k_{r\dot\beta} D_{l\alpha j} s^\gamma = \left(\frac{\partial}{\partial \theta^{\dot\beta}_{rk}} + i\theta^{\mu k}_l \frac{\partial}{\partial x^{\mu\dot\beta}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha j}_l} + \right.$$

$$\left. + i\theta^{\dot\nu}_{rj}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\nu}}\right)\left(\delta^{\gamma\rho} \,\middle|\, x^{\gamma\dot\rho} + i\theta^{\gamma c}_l \theta^{\dot\rho}_{rc} \,\middle|\, \theta^{\gamma d}_l\right) =$$

$$= \left(0 \,\middle|\, i\delta_{\gamma\dot\rho,\alpha\dot\nu}\delta_{\dot\beta k,\dot\nu j} + i\delta_{\alpha j,\gamma c}\delta_{\dot\beta k,\dot\rho c} \,\middle|\, 0\right),$$

откуда

$$(-1)^{\widetilde{D}_r \widetilde{D}_l}\left\langle D^k_{r\dot\beta} D_{l\alpha j} s^\gamma,\ s^{\dot\delta}\right\rangle = 2i\delta^{\alpha\dot\beta k}_{\gamma\dot\delta j}.$$

Вычисляя аналогично второе скалярное произведение, которое удобно представить в виде $(-1)^{\widetilde{st}}\langle X_l X_r t,\ s\rangle$, получим

$$D_{l\alpha j} D^k_{r\dot\beta} s^{\dot\delta} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha j}_l} + i\theta^{\dot\nu}_{rj}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\nu}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot\beta}_{rk}} + \right.$$

$$\left. + i\theta^{\mu k}_l \frac{\partial}{\partial x^{\mu\dot\beta}}\right)\left(x^{\rho\dot\delta} - i\theta^{\rho c}_l \theta^{\dot\delta}_{rc} \,\middle|\, \delta^{\dot\delta\dot\rho} \,\middle|\, \theta^{\dot\delta}_{rd}\right).$$

И снова имеем

$$\left\langle D_{l\alpha j} D^k_{r\dot\beta} s^{\dot\delta},\ s^\gamma\right\rangle = 2i\delta^{\alpha\dot\beta k}_{\gamma\dot\delta j}.$$

Отсюда следует, что отображение a сюръективно и что его можно отождествить с суперкоммутатором относительно изоморфизма

$$(\mathcal{S}^{2|0})^* \otimes (\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^* \to \mathcal{T}_0 M\colon\ s_\alpha \otimes s_{\dot\beta} \mapsto \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}} \operatorname{mod}(\mathcal{T}_l M \oplus \mathcal{T}_r M),$$

где (s_α), $(s_{\dot\beta})$ — базисы сечений $(\mathcal{S}^{2|0})^*$, $(\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^*$, двойственные к (s^α), $(s^{\dot\beta})$. Сравнение со случаем $N = 0$, который отвечает структуре M_{rd}, завершает доказательство.

10. Спинорные разложения на суперпространстве M. Пучки $\mathcal{S}^{2|0}_M = \mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_M = \widetilde{\mathcal{S}}$ на M являются пучками двухкомпонентных суперспиноров. Кроме них, на M имеются два расслоения ранга $0|N$: $\mathcal{S}^{2|N}/\mathcal{S}^{2|0}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^{2|N}/\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}$, связанные канонической двойственностью, которая индуцирована формой $\langle\ \rangle$. Перейдем к П-инвертированным расслоениям, чтобы записать структуру $\Omega^1_{\mathrm{odd}}M = \Pi\mathcal{T}^*M$: положим

$$\mathcal{E}_l = \Pi(\mathcal{S}^{2|N}/\mathcal{S}^{2|0})^* = \Pi(\widetilde{\mathcal{S}}^{2|N}/\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}),$$

$$\mathcal{E}_r = \Pi(\widetilde{\mathcal{S}}^{2|N}/\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^* = \Pi(\mathcal{S}^{2|N}/\mathcal{S}^{2|0}).$$

Теперь мы можем представить следующие сведения о дифференциальных и интегральных формах на M в терминах «суперспинорной алгебры».

а) Пучок 1-форм $\Omega^1 M$ включается в точную последовательность:

$$0 \to \Omega^1_0 M \xrightarrow{a} \Omega^1 M \xrightarrow{(b_l, b_r)} \Omega^1_l M \oplus \Omega^1_r M \to 0,$$

$$\Omega^1_l M = \mathcal{S}^{2|0} \otimes \mathcal{E}_l, \quad \Omega^1_r M = \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0} \otimes \mathcal{E}_r,$$

$$\Omega^1_0 M = \Pi(\mathcal{S}^{2|0} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}), \quad \mathcal{E}_l = \mathcal{E}_r^*.$$

В частности, на M имеются инвариантные дифференциальные уравнения $d_l f = 0$, $d_r f = 0$, где f — функция, $d_{l,r} = b_{l,r} \circ d$, решения которых называются киральными скалярными полями. Разумеется, $d_l f = 0$ означает, что $f = \pi_r^* g$, где g — функция на M_r. Аналогично можно определить киральные сечения пучка $\mathcal{E}$ со связностью ∇ как решения уравнения $\nabla_{l,r} f = 0$, где $\nabla_{l,r} = (\mathrm{id}_{\mathcal{E}} \otimes b_{l,r}) \circ \nabla$.

б) На пучке 2-форм возникает каноническая фильтрация

$$\Omega^2_0 M = S^2(\Omega^1_0 M) \subset \Omega^2_1 M = \Omega^1_0 M \cdot \Omega^1 M \subset \Omega^2_2 M = \Omega^2 M,$$

с факторами

$$\Omega^2_1/\Omega^2_0 = \Omega^1_0 M \otimes (\Omega^1_l M \oplus \Omega^1_r M),$$

$$\Omega^2_2/\Omega^2_1 = \Omega^2_l M \oplus \Omega^2_r M \oplus \Omega^1_l M \otimes \Omega^1_r M.$$

В частности, имеется каноническое нечетное отображение c: $\Omega^2 M \to \Omega^1 M$, которое переводит факторпучок $\Omega^1_l M \otimes \Omega^1_r M$ в подпучок $\Omega^1_0 M$ (см. отождествления в а)). С его помощью определяется часть специфических связей на суперполях Янга — Миллса Δ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1 M$.

в) Березинианы M, M_l, M_r можно вычислить прямо из точной последовательности для Ω^1:

$$\mathrm{Ber}\, M = (\mathrm{Ber}\,\Omega^1 M)^* = (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_0 M)^* \otimes (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_l M)^* \otimes (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_r M)^*,$$

$$(\mathrm{Ber}\,\Omega^1_0 M)^* = \mathrm{Ber}(\mathcal{S}^{2|0} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}) = (\mathrm{Ber}\,\mathcal{S}^{2|0})^2 \otimes (\mathrm{Ber}\,\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^2,$$

$$(\mathrm{Ber}\,\Omega^1_l M)^* = [(\mathrm{Ber}\,\mathcal{S}^{2|0})^N \otimes (\mathrm{Ber}\,\mathcal{E}_l)^2]^*,$$

$$(\mathrm{Ber}\,\Omega^1_r M)^* = [(\mathrm{Ber}\,\widetilde{\mathcal{S}}^{2|0})^N \otimes (\mathrm{Ber}\,\mathcal{E}_r)^2]^*,$$

откуда окончательно

$$\operatorname{Ber} M = (\operatorname{Ber} \mathscr{S}^{2|0})^{2-N} \otimes (\operatorname{Ber} \widetilde{\mathscr{S}}^{2|0})^{2-N}.$$

В частности, при $N=2$ на M имеется каноническая форма объема.

Аналогично находим

$$\pi_l^* (\operatorname{Ber} M_l) = \left(\operatorname{Ber} \mathscr{S}^{2|0}\right)^{2-N} \otimes \left(\operatorname{Ber} \widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}\right)^2 \otimes (\operatorname{Ber} \mathscr{E}_r)^2,$$

$$\pi_r^* (\operatorname{Ber} M_r) = \left(\operatorname{Ber} \widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}\right)^{2-N} \otimes \left(\operatorname{Ber} \mathscr{S}^{2|0}\right)^2 \otimes (\operatorname{Ber} \mathscr{E}_l)^2.$$

11. Вещественные структуры: сигнатура Минковского. В § 3 гл. 1 мы определили на $T \times T^*$ $(N=0)$ вещественную структуру. Она в свою очередь индуцирует на $G(2, T)$ вещественную структуру, на множестве неподвижных точек которой стандартная конформная метрика имеет сигнатуру Минковского. Аналогично, на $P(T) \times P(T^*)$ была введена вещественная структура, которая приводила к римановой метрике на соответствующем сечении $G(2, T)$. Здесь мы продолжим эти вещественные структуры на случай произвольного N. По поводу общих определений типа вещественной структуры см. § 6 гл. 3.

а) Введем на $T \times T^*$ вещественную структуру ρ типа $(1, 1, 1)$

$$\left(w^{\beta}, w_{\dot{\alpha}}, \omega_j\right)^{\rho} = \left(z^{\dot{\beta}}, z_{\alpha}, \zeta^j\right),$$

$$\left(z^{\dot{\beta}}, z_{\alpha}, \zeta^j\right)^{\rho} = \left(w^{\beta}, w_{\dot{\alpha}}, \omega_j\right).$$

Для этой структуры имеем

$$\langle (z, \zeta), (w, \omega) \rangle^{\rho} = w_{\dot{\alpha}} z^{\dot{\alpha}} - w^{\beta} z_{\beta} - 2i\zeta^j \omega_j = -\langle (z, \zeta), (w, \omega) \rangle.$$

Таким образом, стандартное скалярное произведение является чисто мнимым элементом $T \otimes T^*$.

б) Пользуясь координатами из п. 6, получаем индуцированную вещественную структуру на произведении больших клеток $M_l \times M_r$:

$$\left(x_l^{\alpha\dot{\beta}}, \theta_l^{\alpha j}; x_r^{\dot{\alpha}\beta}; \theta_{rj}^{\dot{\alpha}}\right)^{\rho} = \left(x_r^{\dot{\alpha}\beta}, \theta_{rj}^{\dot{\alpha}}; x_l^{\alpha\dot{\beta}}, \theta_l^{\alpha j}\right).$$

Она имеет тот же тип $(1, 1, 1)$. На $\mathscr{S}^{2|0}$, $\widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}$ индуцируется продолжение этой инволюции типа $(\eta = 1, \widetilde{\rho} = 0)$: $\left(s^{\alpha}, s^{\dot{\alpha}}\right)^{\rho} = \left(s^{\dot{\alpha}}, s^{\alpha}\right)$.

в) Пользуясь координатами на большой клетке M, введенными в п. 7, находим, наконец, вещественную структуру на ней:

$$\left(x^{\alpha\dot{\beta}}\right)^{\rho}=\left(x^{\alpha\dot{\beta}}\right)^{t};\quad\left(\theta_{l}^{\alpha j},\,\theta_{rk}^{\dot{\beta}}\right)^{\rho}=\left(\theta_{rj}^{\dot{\alpha}},\,\theta_{l}^{\beta k}\right).$$

Обобщенная вещественная структура типа (1, 1, 1) близка к обычной вещественной структуре; если писать $\bar{f}$ вместо f^{ρ}, имеют место правила $\bar{\bar{f}}=f$, $\overline{fg}=(-1)^{\tilde{f}\,\tilde{g}}\bar{f}\bar{g}=\bar{g}\bar{f}$ (здесь f, g лежат в суперкоммутативной $\mathbf{C}$-алгебре A с вещественной структурой такого типа). Вещественная A-точка большой клетки M определяется как гомоморфизм кольца функций в A, перестановочный с ρ, т. е. такой, что если x переходит в x_0, то x^{ρ} переходит в $\bar{x}_0$. Поэтому в вещественных точках значения координат $(x,\,\theta_l,\,\theta_r)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\left(x^{\alpha\dot{\beta}}\right)^{t}=\left(\bar{x}^{\alpha\dot{\beta}}\right);\quad\left(\theta_{rj}^{\dot{\alpha}},\,\theta_{l}^{\beta k}\right)=\left(\bar{\theta}_{l}^{\alpha j},\,\bar{\theta}_{rk}^{\dot{\beta}}\right).$$

В частности, координаты $x^{a}=\sigma^{a}_{\alpha\dot{\beta}}x^{\alpha\dot{\beta}}$, как и в чисто четном случае, вещественны. Индексы l, r избыточны и их можно опускать, поскольку положение индексов α, $\dot{\beta}$, j при θ уже указывает на киральность. Обычный выбор координат в физической литературе: $\left(x^{a},\,\theta^{\alpha j},\,\theta_{\dot{\beta}k}\right)$, с соотношениями $\theta_{\dot{\beta}k}=\overline{\theta^{\beta k}}$ в вещественных точках.

В частности, множество вещественных точек M посредством π_l (соответственно π_r) вкладывается в множество комплексных точек M_l (соответственно M_r). Это дает возможность, постулировав аналогичную структуру в искривленном случае, считать геометрию $N=1$ супергравитации аналогом геометрии вещественных подмногообразий комплексного многообразия (А. С. Шварц).

12. Вещественные структуры: сигнатура Евклида. На T и T^{*} вводятся суперкватернионные структуры:

$$\left(z_{\alpha},\,z^{\dot{\alpha}},\,\zeta^{j}\right)^{\rho}=\left(\varepsilon^{\alpha\beta}z_{\beta},\,\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}z^{\dot{\beta}},\,\lambda\zeta^{j}\right),$$

$$\left(w^{\alpha},\,w_{\dot{\alpha}},\,\omega_{j}\right)^{\rho}=\left(\varepsilon_{\alpha\beta}w^{\beta},\,\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}w_{\dot{\beta}},\,-\bar{\lambda}\omega_{j}\right).$$

Здесь $\varepsilon^{01}=\varepsilon_{10}=1$, $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|=1$,— фиксированное комплексное число. В отличие от предыдущего пункта, где T и T^{*} рассматривались как суперпространства, т. е. ρ действовала на кольце функций на них, здесь T и T^* рассматриваются как модули над суперкоммутативным кольцом; тип вещественной структуры на последнем подразумевается (1, 1, 1); тип на T, T^* будет ($\eta = -1$, $\tilde{\rho} = 0$). Скалярное произведение снова чисто мнимое:

$$\langle (z, \zeta), (w, \omega)\rangle^{\rho} =$$

$$= \varepsilon^{\alpha\beta} z_{\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma} w^{\gamma} - \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} z^{\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} w_{\dot{\gamma}} + 2i\omega_j \zeta^j = - \langle (z, \zeta), (w, \omega \rangle).$$

Индуцированные структуры на $P(T)$ и $P(T^*)$ будут вещественными, но без вещественных точек.

§ 2. Скалярные суперполя и компонентный анализ

1. **Общие понятия.** а) Суперполя на суперпространстве Минковского M — это сечения естественных расслоений, а также сечения внешних расслоений и связности на них. К естественным расслоениям относятся $\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$, $\mathcal{E}_{l,r}$, $\mathcal{T}M$, а также элементы тензорной алгебры, порожденной этими пучками, и их инвариантно определенные подфакторы.

б) Между естественными расслоениями действуют естественные дифференциальные операторы. Особую роль играют два класса таких операторов: связи и динамические уравнения.

В плоском случае, который мы пока только и рассматривали, решения уравнений связей часто отвечают выделению из всех сечений (данного естественного расслоения) подпространства, неприводимого относительно супергруппы Пуанкаре. Супергруппа Пуанкаре — это ρ-инвариантная часть $\mathrm{SL}(T)$, переводящая в себя бесконечно удаленный световой конус, который компактифицирует большую клетку в $F(2|0, 2|N; T)$, выбранную нами в качестве модели суперпространства Минковского. Ее неприводимые представления, а также их реализации суперполями, называются супермультиплетами.

В искривленном случае, не слишком упрощая положение дел, можно сказать, что связи определены самой геометрической структурой суперпространства; или что выбор их и есть выбор этой структуры.

Динамические уравнения, в отличие от чистых связей, накладывают условия на зависимость суперполя от четных координат суперпространства. Вообще говоря, динамические уравнения являются уравнениями Эйлера — Лагранжа, отвечающими некоторому действию, плотность которого есть форма объема на суперпространстве M (или его киральных версиях $M_{l,r}$), зависящая от суперполей. Во многих случаях, однако, такой суперлагранжиан неизвестен.

в) Преемственность теории суперполей по отношению к обычной теории поля обеспечивается приемом, который называется разложением по компонентам или компонентным анализом. На координатном языке он состоит просто в том, что, скажем, суперфункция Φ представляется в виде $\sum \varphi_\alpha(x)\,\theta^a$, и φ_α рассматриваются как обыкновенные поля на обычном пространстве-времени M_{rd}. Более инвариантно, такой анализ начинается с выбора изоморфизмов $M \simeq \mathrm{Gr}\, M$ $\mathscr{E} \simeq \mathrm{Gr}\,\mathscr{E}$ для естественных расслоений $\mathscr{E}$ и т. п., после чего однородные компоненты полей, компоненты уравнений связи и динамические уравнения и т. п., рассматриваемые в обычном полевом формализме, являются результатами анализа. (К этому следует добавить, что M рассматривается обычно не над $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$), а над неопределенной суперкоммутативной алгеброй, из которой берутся нечетные константы в нужном количестве.)

Неоднозначность выбора этих изоморфизмов может выступать как разного рода калибровочные эквивалентности. Может оказаться, что часть компонент полей можно положить равными нулю либо выразить через остальные, пользуясь связями, уравнениями движения и произволом выбора координат. Компоненты из этой части называются вспомогательными полями.

Проблема отыскания суперпространственной формулировки некоторой теории поля часто выступает как задача построения вспомогательных полей. Этот «компонентный синтез», в отличие от компонентного анализа, как правило, ставит более нетривиальные вопросы. Он не проделан для расширенных супергравитаций.

В следующем параграфе мы проиллюстрируем менее очевидные аспекты компонентного анализа на примере суперполей Янга — Миллса. Здесь же ограничимся простейшими, скалярными суперполями.

2. Скалярное суперполе. Скалярное суперполе Φ есть четная функция (сечение структурного пучка) на M. Будем предполагать для определенности, что в его область определения входит большая клетка, описанная в предыдущем параграфе. Как мы уже упоминали в п. 1.8 суперполе Φ называется левым (соответственно правым) киральным, если

$d_r\Phi = 0$ (соответственно $d_l\Phi = 0$) или, что то же, если Φ принадлежит $\mathcal{O}_{M_l}$ (соответственно $\mathcal{O}_{M_r}$).

Стандартное обозначение Φ при $N = 1$ может иметь вид (в координатах § 1)

$$\Phi\left(x^a, \theta^\alpha, \theta_{\dot\beta}\right) = A(x^a) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x^a) + \overline{\varphi}^{\dot\beta}(x)\,\theta_{\dot\beta} + \theta^\alpha\theta^\beta F_{\alpha\beta}(x^a) +$$

$$+ \theta_{\dot\alpha}\theta_{\dot\beta}\overline{G}^{\dot\alpha\dot\beta}(x^a) + \sigma_b^{\alpha\dot\beta}\theta^\alpha\theta_{\dot\beta}B^b(x^a) + \theta^\alpha\theta^\beta\overline{\varkappa}^{\dot\gamma}_{\alpha\beta}(x^a)\,\theta_{\dot\gamma} +$$

$$+ \theta_{\dot\alpha}\theta_{\dot\beta}\theta^\gamma\lambda_\gamma^{\dot\alpha\dot\beta}(x^a) + \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\theta^\alpha\theta^\beta\theta_{\dot\gamma}\theta_{\dot\delta}D(x^a).$$

Поля A, F, G, B, D на M_{id} — это бозонные компоненты суперполя Φ; поля ψ, φ, $\varkappa$, λ — его фермионные компоненты. Фермионные компоненты являются (зависящими от x) нечетными элементами некоторого суперкоммутативного кольца «параметров». (Не желая вводить его, можно было бы не ограничиваться четными функциями Φ, но нехватка нечетных констант проявилась бы в другом месте.) Черта в этом кольце обозначает вещественную структуру того же типа (1, 1, 1), что и в $\mathcal{O}_M$. Обозначения приспособлены к тому, чтобы написать условие вещественности $\Phi^\rho = \Phi$ в виде $\varphi^{\dot\alpha} = \psi_\alpha$, $F_{\alpha\beta} = G^{\dot\beta\dot\alpha}$, $\overline{B}^b = B^b$, $\varkappa^{\dot\gamma}_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma^{\dot\beta\dot\alpha}$, $\overline{D} = D$.

Условие левой киральности можно записать в виде системы дифференциальных уравнений $D_r^{\dot\beta}\Phi = 0$. Разумеется, она сразу же разрешается, если перейти к левым координатам:

$$\Phi_l = A\left(x_l^{\gamma\dot\delta}\right) + \theta^\alpha\psi_\alpha\left(x_l^{\gamma\dot\delta}\right) + \theta^\alpha\theta^\beta F_{\alpha\beta}\left(x_l^{\gamma\dot\delta}\right).$$

§ 3. Поля Янга — Миллса и уравнения интегрируемости вдоль световых супергеодезических

1. Световые супергеодезические. Двойное расслоение $L \leftarrow F \rightarrow M$, использованное для конструкции неавтодуального преобразования Пенроуза в гл. 2 в случае обычного (компактного комплексного) пространства Минковского M, может быть построено и над общим суперпространством Минковского. Оно имеет следующую структуру:

$$L^{5|2N} = F(1\,|\,0,\,3\,|\,N;\,T) \xleftarrow{\pi_1} F^{6|4N} =$$

$$= F(1\,|\,0,\,2\,|\,0,\,2\,|\,N,\,3\,|\,N;\,T) \xrightarrow{\pi_2} M = F(2\,|\,0,\,2\,|\,N;\,T).$$

Размерности суперпространств L, F, M вычисляются, например, с помощью результатов § 3 гл. 4. Проекции π_1, π_2, будучи стандартными проекциями на подфлаг, представляют F в виде относительных пространств флагов и потому локально по L, M являются прямыми произведениями. Слои F над L размерности $1|2N$ называются (поднятыми) световыми супергеодезическими суперпространства M.

Для того, чтобы лучше представить себе геометрию этого двойного расслоения, удобно воспользоваться системой понятий, введенной в § 6 гл. 1 в обычной комплексной геометрии. Эти понятия без изменений переносятся в супергеометрию.

а) Супермногообразие F определяет $1|2N$-коническую структуру на M, т. е. определено естественное замкнутое вложение φ: $F \to G_M(1|2N; \mathcal{T}M)$, коммутирующее с проекциями на M. Оно определяется тем, что прообраз тавтологического пучка на последнем грассманиане есть $\mathcal{T}F/L$, вложенный в $\pi_2^*(\mathcal{T}M)$ посредством $d\varphi$. Для проверки корректности этого определения нужно установить, что $d\varphi$: $\mathcal{T}F/L \to \pi_2^*(\mathcal{T}M)$ — локально-прямое вложение: это будет следовать из вычислений, которые проведены ниже.

б) Распределение $\mathcal{T}F/L$ является интегрируемой конической связностью, а слои проекции π_1 — ее геодезическими супермногообразиями.

2. Структура $\Omega^i F/L$. Нетрудно убедиться, что F/L является относительным флаговым многообразием следующего вида: $F = F_L(1|0, 1|N; \mathcal{S}_L^{3|N}/\mathcal{S}_L^{1|0})$, где $\mathcal{S}_L$ — компоненты тавтологического флага на L в его стандартной флаговой реализации. Как мы это делали для M в § 1, введем левое и правое пространства F:

$$F_l = G_L(1|0; \mathcal{S}_L^{3|N}/\mathcal{S}_L^{1|0}),$$
$$F_r = G_L(1|N; \mathcal{S}_L^{3|N}/\mathcal{S}_L^{1|0})$$

и соответствующие относительные пространства дифференциалов $(\Omega^{\cdot} = \Omega^{\cdot}_{\mathrm{odd}})$:

$$\Omega_l^1 F/L = \Omega^1 F/F_r, \quad \Omega_r^1 F/L = \Omega^1 F/F_l.$$

Пользуясь теоремой об относительных касательных пучках грассманианов, находим точную последовательность:

$$0 \to \Omega_0^1 F/L \to \Omega^1 F/L \to \Omega_l^1 F/L \oplus \Omega_r^1 F/L \to 0,$$

где

$$\Omega^1_l F/L = \Pi\mathcal{H}om\left(\mathcal{S}^{2|N}_F/\mathcal{S}^{2|0}_F,\ \mathcal{S}^{2|0}_F/\mathcal{S}^{1|0}_F\right) =$$

$$= \mathcal{S}^{2|0}_F/\mathcal{S}^{1|0}_F \otimes \Pi\left(\mathcal{S}^{2|N}_F/\mathcal{S}^{2|0}_F\right)^*,$$

$$\Omega^1_r F/L = \Pi\mathcal{H}om\left(\mathcal{S}^{3|N}_F/\mathcal{S}^{2|N}_F,\ \mathcal{S}^{2|N}_F\,|\,\mathcal{S}^{2|0}_F\right) =$$

$$= \Pi\mathcal{S}^{2|N}_F/\mathcal{S}^{2|0}_F \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_F/\widetilde{\mathcal{S}}^{1|0}_F,$$

$$\Omega^1_0 F/L = \Pi\left(\mathcal{S}^{2|0}_F/\mathcal{S}^{1|0}_F \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_F/\widetilde{\mathcal{S}}^{1|0}_F\right).$$

Здесь $\Omega^1_0 F/L$ определяется как ядро ограничения пучка 1-форм на прямую сумму левых и правых относительных форм. Его спинорное разложение, выписанное выше, устанавливается, как в § 1 аналогичный результат для $\Omega^1_0 M$: вычислением формы Фробениуса $\mathcal{T}_l F/L \otimes \mathcal{T}_r F/L \to \mathcal{T}_0 F/L$ и последующей дуализацией. Мы опускаем подробности; однако напомним для сопоставления информацию об $\Omega^1 M$, представленную в том же виде, из § 1:

$$0 \to \Omega^1_0 M \to \Omega^1 M \to \Omega^1_l M \oplus \Omega^1_r M \to 0,$$

где

$$\Omega^1_l M = \mathcal{S}^{2|0}_M \otimes \Pi\left(\mathcal{S}^{2|N}_M/\mathcal{S}^{2|0}_M\right)^*,$$

$$\Omega^1_r M = \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_M \otimes \Pi\left(\mathcal{S}^{2|N}_M/\mathcal{S}^{2|0}_M\right),$$

$$\Omega^1_0 M = \Pi\left(\mathcal{S}^{2|0}_M \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_M\right).$$

Введем теперь пучок $\mathcal{N}$, определив его с помощью точной последовательности

$$0 \to \mathcal{N} \to \pi_2^*\left(\Omega^1 M\right) \xrightarrow{\text{res}} \Omega^1 F/L \to 0,$$

где res — ограничение формы на π_1-вертикальные векторные поля. Сравнивая точные последовательности для $\Omega^1 M$ и $\Omega^1 F/L$, после проверки того, что res индуцирован естественными отображениями соответствующих тавтологических пучков, получаем аналогичное разложение для $\mathcal{N}$ (учесть, что $\mathcal{S}^{2|0}_F$, $\mathcal{S}^{2|N}_F$ и аналогичные пучки с волной подняты с M):

$$0 \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}_l \oplus \mathcal{N}_r \to 0,$$

где

$$\mathcal{N}_l = \mathcal{S}^{1|0}_F \otimes \Pi\left(\mathcal{S}^{2|N}_F/\mathcal{S}^{2|0}_F\right)^*,$$

$$\mathcal{N}_r = \widetilde{\mathcal{S}}^{1|0}_F \otimes \Pi\left(\mathcal{S}^{2|N}_F/\mathcal{S}^{2|0}_F\right),$$

$$0 \to \Pi\left(\mathcal{S}^{1|0}_F \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{1|0}_P\right) \to$$

$$\to \Pi\left(\mathcal{S}^{2|0}_F \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{1|0}_F \oplus \mathcal{S}^{1|0}_F \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_F\right) \to \mathcal{N}_0 \to 0.$$

Пользуясь этими сведениями об $\mathscr{N}$, установим следующий результат, который дальше будет играть основную роль в анализе связей и динамических уравнений для суперполей Янга — Миллса на M.

3. **Теорема.** а) $\pi_{2*}(\mathrm{res})\colon \Omega^1 M \to \pi_{2*}\Omega^1 F/L$ *есть изоморфизм.*

б) *На 2-формах отображение* $\pi_{2*}(\mathrm{res})$ *является сюръекцией. Ее ядро* $\Omega^2_{\mathrm{con}}M$, *которое мы назовем пучком 2-форм, удовлетворяющих связям (constraints), имеет следующую структуру:*

$$\Omega^2_{\mathrm{con}}M = R^1\pi_{2*}(\Lambda^2 N),$$

$$\Omega^2_{\mathrm{con}}M/\Omega^2_{1,\mathrm{con}}M = \Lambda^2(\mathscr{S}^{2|0}_M) \otimes \Lambda^2\mathscr{E}_l \oplus \Lambda^2(\widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}_M) \otimes \Lambda^2\mathscr{E}_r,$$

$$\Omega^2_{1,\mathrm{con}}M = \Pi\big(\Lambda^2(\mathscr{S}^{2|0}_M) \otimes \widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}_M \otimes \mathscr{E}_l \oplus \Lambda^2(\widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}_M) \otimes$$
$$\otimes \mathscr{S}^{2|0}_M \otimes \mathscr{E}_r\big).$$

Здесь $\Omega^2_{i,\mathrm{con}}M$ — *фильтрация, которая индуцирована фильтрацией на* $\Omega^2 M$, *введенной в* п. 1.8.

Доказательство. Очевидно, F/M является относительной двумерной квадрикой: $F/M = P(\mathscr{S}^{2|0}_M) \underset{M}{\times} P(\widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}_M)$. Отсюда следует, что $\pi_{2*}\mathscr{O}_F = \mathscr{O}_M$ и, более общо, $\pi_{2*}(\pi_2^*\mathscr{E}) = \mathscr{E}$, $R^i\pi_{2*}(\pi_2^*\mathscr{E}) = 0$ при $i \geqslant 1$ для локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на M. Пучки $\mathscr{S}^{1|0}_F$ и $\widetilde{\mathscr{S}}^{1|0}_F$ на этой относительной квадрике в стандартных обозначениях суть $\mathscr{O}(-1, 0)$ и $\mathscr{O}(0, -1)$. Все пучки $\mathscr{O}(a, b)$ при $a = -1$ или $b = -1$ ацикличны. Поэтому $R^i\pi_{2*}(\pi_2^*\mathscr{E}(a, b)) = 0$ при всех $i \geqslant 0$, если $a = -1$ или $b = -1$.

Применив эти соображения к пучкам $\mathscr{N}_0$, $\mathscr{N}_l$, $\mathscr{N}_r$ и $\mathscr{N}$, введенным в предыдущем пучке, немедленно получаем, что они относительно ацикличны над M. Отсюда сразу же следует, что $\pi_{2*}(\mathrm{res})\colon \Omega^1 M \to \pi_{2*}(\Omega^1 F/L)$ является изоморфизмом.

Доказательство второй части теоремы несколько длиннее. Прежде всего, из точной последовательности

$$0 \to \mathscr{N}\pi_2^*(\Omega^1 M) \to \pi_2^*\Omega^2 M \to \Omega^2 F/L \to 0$$

находим

$$0 \to \pi_{2*}(\mathscr{N}\pi_2^*(\Omega^1 M)) \to \Omega^2 M \to \pi_{2*}(\Omega^2 F/L) \to$$
$$\to R^1\pi_{2*}(\mathscr{N}\pi_2^*\Omega^1 M) \to 0.$$

Поскольку $\mathcal{N}$ вложен в $\pi_2^*(\Omega^1 M)$ в виде локально прямого подпучка, а $\Omega^2 M$ есть симметрический квадрат $\Omega^1 M$, нетрудно убедиться, что имеет место точная последовательность

$$0 \to \Lambda^2\mathcal{N} \to \mathcal{N} \otimes \pi_2^*(\Omega^1 M) \to \mathcal{N}\pi_2^*(\Omega^1 M) \to 0.$$

Средний пучок в ней ацикличен, поэтому $R^i\pi_{2*}(\mathcal{N}\pi_2^*(\Omega^1 M)) = R^{i+1}\pi_{2*}(\Lambda^2\mathcal{N})$.

Проверим, что $R^2\pi_{2*}(\Lambda^2\mathcal{N}) = 0$. В силу относительно двойственности Серра (которая здесь сводится к обычной двойственности на квадрике), это равносильно тому, что $\pi_{2*}(\Lambda^2\mathcal{N}^*(-2, -2)) = 0$. Последнее утверждение устанавливается опять с помощью результатов предыдущего пункта: а) $\pi_{2*}(\Lambda^2\mathcal{N}_0^*(-2, -2)) = 0$, поскольку $\Lambda^2\mathcal{N}_0^*$ вложен в пучок типа $\bigoplus\limits_{a+b=2} \pi_2^*(\mathcal{E}_{ab})(a, b)$, a, $b \geqslant 0$; б) пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\Lambda^2\mathcal{N}^* \to \Lambda^2\mathcal{N}_0^*)$; тогда $\pi_{2*}(\mathcal{K}(-2, -2)) = 0$, поскольку $\mathcal{K}$ является подпучком пучка с фильтрацией и факторами вида $(\mathcal{N}_l^* \oplus \mathcal{N}_r^*)^{\otimes 2}$, $(\mathcal{N}_l^* \oplus \mathcal{N}_r^*) \otimes \mathcal{N}_0^*$, которые после умножения на $\mathcal{O}(-2, -2)$ становятся послойно отрицательными. Мы установили, таким образом, что $\Omega^2_{\mathrm{con}} M = R^1\pi_{2*}(\Lambda^2\mathcal{N})$, а морфизм $\Omega^2 M \to \pi_{2*}\Omega^2 F/L$ сюръективен.

В п. 1.8 была описана трехчленная фильтрация $\Omega^2 M$. Аналогичные фильтрации естественно возникают на $\pi_{2*}\Omega^2 F/L$ и $\Omega^2_{\mathrm{con}} M$.

Так как $\mathrm{rk}\,\Omega^1_0 F/L = 0\,|\,1$, то $S^2(\Omega^1_0 F/L) = 0$, и на $\Omega^2 F/L$ фильтрация получается двучленной:

$$0 \to \Omega^1_0 F/L \otimes (\Omega^1_l F/L \oplus \Omega^1_r F/L) \to \\ \to \Omega^2 F/L \to S^2(\Omega^1_l F/L \oplus \Omega^1_r F/L) \to 0,$$

откуда

$$0 \to \pi_{2*}[\Omega^1_0 F/L \otimes (\Omega^1_l F/L \oplus \Omega^1_r F/L)] \to \\ \to \pi_{2*}\Omega^2 F/L \to S^2(\mathcal{S}_M^{2|0}) \otimes S^2\mathcal{E}_l \oplus \\ \oplus \Omega^1_l M \otimes \Omega^1_r M \oplus S^2(\widetilde{\mathcal{S}}_M^{2|0}) \otimes S^2\mathcal{E}_r \to 0.$$

Соответствующая двучленная фильтрация на $\Omega^2_{\mathrm{con}} M$, индуцированная с $\Omega^2 M$, такова:

$$0 \to \Omega^2_{1,\mathrm{con}} M \to \Omega^2_{\mathrm{con}} M \to \\ \to \Lambda^2(\mathcal{S}_M^{2|0}) \otimes \Lambda^2\mathcal{E}_l \oplus \Lambda^2(\widetilde{\mathcal{S}}_M^{2|0}) \otimes \Lambda^2\mathcal{E}_r \to 0,$$

где $\Omega^2_{1,\mathrm{con}}M = \Omega^2_1 M \cap \Omega^2_{\mathrm{con}}M$ можно вычислить также ядро композиции отображений

$$\Omega^2_1 M \to \Omega^2_1 M/\Omega^2_0 M = \Omega^1_0 M \otimes (\Omega^1_l M \oplus \Omega^1_r M) \to$$
$$\to \pi_{2*}\left[\Omega^1_0 F/L \otimes (\Omega^1_l F/L \oplus \Omega^1_r F/L)\right].$$

Вторая строчка имеет прозрачный смысл в тензорной алгебре. Для левых компонент имеем

$$\Omega^1_0 M \otimes \Omega^1_l M = \Pi\left[\mathcal{S}^{2|0}_M \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_M \otimes \mathcal{S}^{2|0}_M \otimes \mathcal{E}_l\right],$$
$$\pi_{2*}\left[\Omega^1_0 F/L \otimes \Omega^1_l F/L\right] = \Pi\left[S^2(\mathcal{S}^{2|0}_M) \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{2|0}_M \otimes \mathcal{E}_l\right],$$

и этот морфизм сводится к симметризации по $\mathcal{S}_M$. Аналогично устроены правые компоненты.

4. Поля Янга — Миллса, интегрируемые вдоль световых супергеодезических. Пусть теперь $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок над некоторой областью $U \subset M$, $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1 M$ — связность на нем. Как в чисто четной геометрии, на $\mathcal{E}_F = \pi_2^*(\mathcal{E})$ определена связность $\pi_2^*(\nabla)$ и ее ограничение $\nabla_{F/L}\colon \mathcal{E}_F \to \mathcal{E}_F \otimes \Omega^1 F/L$ на слои π_1. Назовем $(\mathcal{E}, \nabla)$ полем Янга — Миллса, интегрируемым вдоль световых супергеодезических, кратко: нуль-интегрируемым, если выполняются следующие равносильные условия:

а) $\nabla^2_{F/L} = 0$;

б) $\Phi(\nabla) \in \Gamma(\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^2_{\mathrm{con}}M)$, где $\Phi(\nabla)$ — форма кривизны ∇. Их эквивалентность следует из теоремы 3: если $\Phi(\nabla)$ — кривизна ∇, то равенство $\nabla^2_{F/L} = 0$ означает, что ограничение $\pi_2^*(\Phi(\nabla))$ на $\mathcal{T}F/L$ равно нулю, т. е. $\Phi(\nabla) \in \operatorname{Ker}\pi_{2*}(\mathrm{res}) = \mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^2_{\mathrm{con}}M$.

Сравним данное выше описание пучка $\Omega^2_{\mathrm{con}}M$ с координатной записью связей, приводимой обычно в журнальной литературе. На большой клетке форма кривизны записывается в базисе $\Omega^1 M$, который двойствен к базису

$$D_{\alpha j},\ D^k_{\dot\beta}, \quad D_a = \frac{1}{N}\sigma_a^{\alpha\dot\beta}\left[D_{\alpha j}, D^j_{\dot\beta}\right].$$

Соответственно ее компоненты имеют вид Φ_{AB}, где индексы A, B берутся из множества $\left\{a = 0, 1, 2, 3;\ (\alpha j),\ \binom{k}{\dot\beta}\right\}$.

В этих обозначениях имеем следующие уравнения.

а) $N = 1$. Индексы j, k можно опустить; связи имеют вид $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\dot\alpha\dot\beta} = \Phi_{\alpha\dot\beta} = 0$. На нашем языке это отвечает обращению в нуль образа Φ в $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Omega^2/\Omega^2_1$ в согласии с тем, что при $N = 1$ имеем $\Lambda^2\mathscr{E}_l = \Lambda^2\mathscr{E}_r = 0$, так что в силу теоремы 3 находим $\Omega^2_{\mathrm{con}} = \Omega^2_{1,\mathrm{con}}$.

После этого устанавливается, что оставшиеся компоненты кривизны можно выразить через предпотенциалы W_α, $W_{\dot\beta} \in \mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \mathscr{S}^{2|0}$ (или $\widetilde{\mathscr{S}^{2|0}}$). На нашем языке это очевидно: тривиализовав пучки ранга один $\Lambda^2\mathscr{S}^{2|0}$, $\Lambda^2\widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}$, $\mathscr{E}_l$ и $\mathscr{E}_r$ над большой клеткой, мы можем отождествить $\Omega^2_{1,\mathrm{con}}$ прямо с $\mathscr{S}^{2|0}_l \oplus \mathscr{S}^{2|0}_r$; компоненты кривизны при этом отождествлении суть предпотенциалы.

Лагранжиан поля Янга — Миллса должен быть вещественным сечением $\mathrm{Ber}\,M$, т. е. пучка $\Lambda^2(\mathscr{S}^{2|0}) \otimes \Lambda^2(\widetilde{\mathscr{S}^{2|0}})$ (см. п. 1.8). Это сечение можно построить по $\Phi = \Phi_l \oplus \Phi_r$, положив $\mathscr{L} \sim \mathrm{Tr}\left(\Phi^2_l \oplus \Phi^2_r\right)$. Здесь след Tr включает, кроме следа в $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}$, свертку $\mathscr{S}_l$ и $\mathscr{S}_r$ с помощью сечений $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и вещественной структуры. В координатной записи $\mathscr{L} = \mathrm{Tr}\left(W^\alpha W_\alpha + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\right)$.

б) $N = 2$. Начиная с $N = 2$, $\Omega^2_{\mathrm{con}}M$ не совпадает с $\Omega^2_{1,\mathrm{con}}M$, и условия на Φ по модулю $\Omega^2_1 M$ становятся содержательными. Координатная запись связей, принятая в литературе, такова:

$$\Phi_{\alpha i,\beta j} = -\Phi_{\beta i,\alpha j}, \quad \Phi^{i\;\;j}_{\dot\alpha\dot\beta} = -\Phi^{i\;\;j}_{\dot\beta\dot\alpha}, \quad \Phi_{\alpha i,}{}^{j}_{\dot\beta} = 0.$$

Очевидно, она равносильна нашей формулировке, следующей из теоремы 3:

$$\Phi \bmod \Omega^2_{1,\mathrm{con}}M \in \Lambda^2\left(\mathscr{S}^{2|0}\right) \otimes \Lambda^2\mathscr{E}_l \oplus \Lambda^2\left(\widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}\right) \otimes \Lambda^2\mathscr{E}_r.$$

Как выше, пользуясь тривиализациями этих двух обратимых пучков, мы можем написать

$$\Phi \bmod \Omega^2_{1,\mathrm{con}}M = W_l \oplus W_r,$$

где W_l, W_r — скалярные функции, предпотенциалы поля Янга — Миллса для $N = 2$.

Здесь уже неочевидно, что любая форма Φ с условием

$$\Phi \bmod \Omega^2_{1,\mathrm{con}}M \in \mathscr{E}nd\;\mathscr{E} \otimes \Omega^2_{\mathrm{con}}M/\Omega^2_{1,\mathrm{con}}M$$

автоматически принадлежит $\mathscr{E}nd\,\mathscr{E} \otimes \Omega^2_{\mathrm{con}}M$. Это и неверно; однако если Φ — кривизна связности, то она удовлетворяет тождеству Бьянки, из которого сначала следует, что Φ можно полностью выразить через W_l, W_r, а затем — что получившаяся форма лежит в $\mathcal{E}nd\,\mathcal{E} \otimes \Omega^2_{\mathrm{con}}M$. Мы опускаем это вычисление.

Лагранжиан поля Янга — Миллса при $N=2$ пропорционален $\mathrm{Tr}\left(W_l^2 \otimes W_r^2\right)$. Напомним, что $\mathrm{Ber}\,M \simeq \mathcal{O}_M$ в этом случае, так что любую скалярную функцию можно считать формой объема.

в) $N=3$. По-видимому, лагранжиан в этом случае неизвестен, а уравнения связи, написанные выше, совпадают с уравнениями движения.

г) $N=4$. Уравнения движения получаются добавлением к связям условия

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha i,\beta j} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijkl}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\Phi^{kl}_{\dot\alpha\dot\beta}.$$

Это — своеобразное условие автодуальности по $\Lambda^2\mathcal{E}_{l,r}$, которое только и может появиться при $N=4$.

5. Метод построения нуль-интегрируемых полей Янга — Миллса. Пусть $U \subset M$ — открытое множество, $L(U) = \pi_1\pi_2^{-1}(U)$. Мы рассматриваем $L(U)$ как открытое подсуперпространство в L. Полагая, как в гл. 2, $L(x) = \pi_2\pi_1^{-1}(x)$, $x \in U$, имеем $L(U) = \bigcup\limits_{x\in U} L(x)$. Квадрики $L(x)$ мы рассматриваем как замкнутые подсуперпространства в L. Локально свободный пучок $\mathcal{E}_L$ на $L(U)$ назовем U-тривиальным, если его ограничение на любую из квадрик $L(x)$, $x \in U$, является тривиальным (или свободным) пучком, т. е. изоморфно $\mathcal{O}^{p|q}_{L(x)}$. ЯМ-пучком назовем локально свободный пучок $\mathcal{E}_L$, определенный на некотором открытом подмножестве $V \subset L$ и такой, что для непустого $U \subset M$ имеем $V \supset L(U)$ и $\mathcal{E}_L|_{L(U)}$ U-тривиальный.

Пусть $\mathcal{E}_L$ — некоторый ЯМ-пучок. Преобразование Пенроуза, переводящее его в нуль-интегрируемое поле Янга — Миллса на области тривиальности U, определяется точно так же, как в чисто четном случае:

а) Строим пучок $\mathcal{E}_F = \pi_1^*(\mathcal{E}_L)$ на $\pi_1^{-1}(L(U))$ и относительную связность $\nabla_{F/L}\colon \mathcal{E}_F \to \mathcal{E}_F \otimes \Omega^1 F/L$, однозначно определяемую тем, что $\nabla_{F/L}$ обращается в нуль на $\pi_1^{-1}(\mathcal{E}_L)$. Очевидно, $\nabla^2_{F/L} = 0$.

б) Ограничиваем $\mathcal{E}_F$, $\nabla_{F/L}$ на $\pi_2^{-1}(U)$; для краткости оставим обозначения теми же. Положим $\mathcal{E} = \pi_{2*}(\mathcal{E}_F)$, $\nabla = \pi_{2*}(\nabla_{F/L})$. Из U-тривиальности $\mathcal{E}_L$ следует, что $\mathcal{E}_F =$

$= \pi_2^*(\mathscr{E})$ (канонически). В силу теоремы 3 мы можем отождествить тогда $\pi_{2*}(\mathscr{E}_F \otimes \Omega^1 F/L) = \pi_{2*}(\pi_2^*\mathscr{E} \otimes \Omega^1 F/L)$ с $\mathscr{E} \otimes \Omega^1 M$. Нетрудно проверить, что дифференциальный оператор ∇: $\mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \Omega^1 M$ является связностью. По самому построению поле Янга — Миллса $(\mathscr{E}, \nabla)$ нуль-интегрируемо.

Имеется очевидное ограничение, которому удовлетворяет $(\mathscr{E}, \nabla)$: связность ∇ имеет тривиальную монодромию вдоль всех непустых пересечений световых геодезических с U. По существу, это единственное ограничение на $(\mathscr{E}, \nabla)$, которое можно получить таким способом.

6. Теорема. *Пусть непустые пересечения световых геодезических с U связны. Тогда следующие категории эквивалентны:*

а) *Категория нуль-интегрируемых полей Янга — Миллса $(\mathscr{E}, \nabla)$ на U с тривиальной монодромией вдоль световых геодезических.*

б) *Категория U-тривиальных* ЯМ-*пучков на $L(U)$.*

Доказательство формально такое же, как в чисто четном случае. ■

7. Суперсимметричные уравнения Янга — Миллса. Предположим, что ЯМ-пучок $\mathscr{E}_L$, определенный на $L(U)$ и U-тривиальный, продолжается до локально свободного пучка $\mathscr{E}_L^{(m)}$ на m-й инфинитезимальной окрестности $L^{(m)}(U)$ в $P(T) \times P(T^*) = P \times \widehat{P}$ (конечно, $L^{(m)}(U)_{rd} = L(U)_{rd}$, пучок индуцирован $\mathcal{O}_{P\times\widehat{P}}/I_L^{m+1}$, где I_L-пучок уравнений L). Назовем $\mathscr{E}_L$ m-продолжимым. Свойство m-продолжимости, как и в чисто четном случае, может быть выражено дополнительной системой дифференциальных уравнений, наложенных на поле Янга — Миллса $(\mathscr{E}, \nabla)$, отвечающее $\mathscr{E}_L$. **Следуя Виттену,** мы примем это условие за определение суперсимметричных уравнений Янга — Миллса при $N \leqslant 3$.

8. Определение. Поле $(\mathscr{E}, \nabla)$ называется *решением суперсимметричных уравнений Янга — Миллса*, если (локально по M) оно отвечает $(3 - N)$-продолжимому ЯМ-пучку $\mathscr{E}_L$. ■

Известно, что при $N \leqslant 2$ эти уравнения могут быть выведены из лагранжианов, которые приведены в п. 4 и определены на полях, удовлетворяющих связям. При $N = 3$ и $N = 4$ уравнения были написаны независимо от преобразования Пенроуза, и их совпадение при $N = 3$ с определением 8 должно проверяться независимо. При $N = 4$ интерпретация в терминах $\mathscr{E}_L$ не до конца понятна.

В следующем параграфе мы применим алгебро-геометрический метод монад для конструкции решений суперсимметричных уравнений Янга — Миллса.

9. Когомологический компонентный анализ. В § 2 мы объясняли, что компонентный анализ скалярного суперполя на M состоит просто в его разложении по степеням θ в фиксированной системе координат и интерпретации коэффициентов как обычных (классических) полей на M_{rd}. Аналогично можно провести компонентный анализ поля Янга — Миллса, однако здесь он осложнен двумя обстоятельствами: во-первых, необходимостью учитывать калибровочную эквивалентность; во-вторых, необходимостью следить за формой связности и формой кривизны параллельно.

Поэтому в рамках преобразования Пенроуза представляет интерес возможность провести компонентный анализ когомологическими средствами прямо в терминах ЯМ-пучка $\mathscr{E}_L$. При этом, разумеется, мы вынуждены будем ограничиться лишь нуль-интегрируемыми полями и, следовательно, понять, как на когомологическом языке отражается наличие связей и динамических уравнений. Оказывается, основные черты этого те же, что при работе в чисто четном случае с инфинитезимальными окрестностями $L^{(m)}$, $N=0$.

Повторим вкратце с необходимыми видоизменениями формализм теории препятствий и продолжений в супераналитическом случае.

10. Продолжения и препятствия. Пусть M — аналитическое супермногообразие, $J=\mathcal{O}_{M,1}+\mathcal{O}_{M,1}^2$, $M^{(n)}=(M, \mathcal{O}_M/J^{n+1})$. Пусть G — связная аналитическая (комплексная) супергруппа, $\rho\colon G\to \mathrm{GL}(p|q)$ — ее конечномерное представление. Фиксируем класс некоммутативных когомологий $e\in H^1(M, G(\mathcal{O}_M))$, где $G(\mathcal{O}_M)$ — пучок аналитических отображений областей M в G. Пару (e,ρ) можно рассматривать как локально свободный пучок ранга $p|q$ на M, структурная группа которого редуцирована до G в представлении ρ. В частности, при $G=\mathrm{GL}(p|q)$, $\rho=\mathrm{id}$, элементы $H^1(M, \mathrm{GL}(p|q;\ \mathcal{O}_M))$ классифицируют пучки ранга $p|q$ с точностью до изоморфизма.

Пусть теперь $e^{(n)}\in H^1(M, G(\mathcal{O}_M/J^{n+1}))$, $\mathscr{G}$ — локально свободный пучок на $M^{(0)}=M_{\mathrm{rd}}$, отвечающий паре $(e^{(0)}, \mathrm{Ad})$, где $e^{(0)}$ — редукция $e^{(n)} \bmod J$, Ad — присоединенное представление. Как и в чисто четном случае, имеют место следующие факты.

а) Определено отображение $\omega\colon H^1(M, G(\mathcal{O}_M/J^{n+1}))\to$ $\to H^2(M, (\mathcal{G}\otimes J^{n+1}/J^{n+2})_0)$ такое, что $\omega(e^{(n)})=0$, если и только если $e^{(n)}$ продолжается до некоторого класса

$e^{(n+1)}\in H^1(M, G(\mathcal{O}_M/J^{n+2}))$.

Конструкция ω такова. Имеется коммутативная диаграмма точных троек:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J^{n+1}/J^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{M(n+1)} \arrow[r] \arrow[d, "d\otimes 1"] & \mathcal{O}_{M(n)} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^{n+1}/J^{n+2} \arrow[r] & \Omega^1 M^{(n+1)}\otimes\mathcal{O}_{M(n)} \arrow[r] & \Omega^1 M^{(n)} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Из нее получается коммутативная диаграмма пучков:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathcal{G}\otimes J^{n+1}/J^{n+2})_0 \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & G(\mathcal{O}_{M(n+1)}) \arrow[r] \arrow[d, "D\otimes 1"] & G(\mathcal{O}_{M(n)}) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & 1 \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{G}\otimes J^{n+1}/J^{n+2})_0 \arrow[r] & (\mathcal{G}\otimes\Omega^1 M^{(n+1)}\otimes\mathcal{O}_{M(n)})_1 \arrow[r] & (\mathcal{G}\otimes\Omega^1 M^{(n)})_1 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где $Dg=g^{-1}dg$ в матричной реализации. Отображение препятствия ω представляет собой композицию:

$$\omega: H^1(M, G(\mathcal{O}_{M(n)}))\xrightarrow{H^1(D)} H^1(M, (\mathcal{G}\otimes\Omega^1 M^{(n)})_1)\xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^2(M, (\mathcal{G}\otimes J^{n+1}/J^{n+2})_0).$$

Индексы 0, 1 относятся, конечно, к $\mathbf{Z}_2$-градуировке.

б) Если $\omega(e^{(n)})=0$, то группа $H^1(M, (\mathcal{G}\otimes J^{n+1}/J^{n+2})_0)$ транзитивно действует на множестве продолжений $\{e^{(n+1)}\}$ класса $e^{(n)}$.

в) Это действие эффективно, если для одного из продолжений отображение $H^0(M, \mathcal{G}^{(n+1)})\to H^0(M, \mathcal{G}^{(n)})$ является сюръекцией, где $\mathcal{G}^{(n+1)}$, $\mathcal{G}^{(n)}$ — пучки, ассоциированные с $(e^{(n+1)}, \mathrm{Ad})$, $(e^{(n)}, \mathrm{Ad})$ соответственно.

Заметим, что даже если это действие неэффективно, все же можно канонически определить разность $e_1^{(n+1)}-e_2^{(n+1)}\in$ $\in H^1(M, (\mathcal{G}\otimes J^{n+1}/J^{n+2})_0)$ двух продолжений e_1, e_2.

11. Компонентный анализ $\mathcal{E}_L$. Из результатов § 3 гл. 6 ясно, что на $P\times\widehat{P}$ имеем $J^{n+1}/J^{n+2}=S^{n+1}(J/J^2)=$ $=S^{n+1}(T_1^*\otimes\mathcal{O}(-1, 0)\oplus T_1\otimes\mathcal{O}(0, -1))$, где T_1 — нечетная часть пространства супертвисторов T. Поскольку L — супермногообразие, а его нечетная размерность та же, что у $P\times\widehat{P}$, т. е. $2N$, та же формула имеет место для J_L^{n+1}/J_L^{n+2}. Симметрические (т. е. грассмановы) степени следует также строить над $\mathcal{O}_{L_{\mathrm{rd}}}$; $J_L^{n+1}=0$ при $n\geqslant 2N$.

Пусть $e \in H^1(L(U), G(\mathcal{O}_L))$, $e^{(n)}$ — образ e в $H^1\left(L(U),\right.$ $\left.G\left(\mathcal{O}_L/J_L^{n+1}\right)\right)$. Можно представить себе, что e строится последовательно, от $e^{(n)}$ к $e^{(n+1)}$. Пара $(e^{(0)}, \rho)$ представляет ЯМ-пучок $\mathcal{E}_L^{(0)}$ на L_{rd} со структурной группой, редуцированной до G. (Заметим, что структурная группа может быть супергруппой, хотя L_{rd} — чисто четное многообразие.) Ему отвечает обычное поле Янга — Миллса на $U \subset G(2;\ T_0)$ с группой G, если $\mathcal{E}_L$ U-тривиален.

Если $e^{(n)}$ уже построен и $\omega(e^{(n)}) = 0$, выбираем какое-нибудь продолжение $\tilde{e}^{(n+1)}$, параметризуем другие продолжения элементами $h^{(n+1)}$ соответствующей группы когомологий и пишем уравнение $\omega(\tilde{e}^{(n+1)} + h^{(n+1)}) = 0$. Элементы $h^{(n+1)}$ преобразованием Радона — Пенроуза превращаются в поля на U_{rd}, так же, как элементы групп когомологий, в которых лежат препятствия $\omega(e^{(n)})$. Неопределенность в выборе начального продолжения $\tilde{e}^{(n+1)}$ при условии $\omega(e^{(n)}) = 0$ можно рассматривать как остаток теории некоммутативных когомологий (неабелевых полей Янга — Миллса), несводимый к чисто абелевому случаю. Вид оператора ω определяет вид уравнений нуль-интегрируемости, а при переходе от L к $L^{(m)}$ через промежуточные окрестности — вид суперсимметричных уравнений Янга — Миллса.

Чтобы не усложнять изложения и ограничиться использованием тех групп когомологий, которые уже были вычислены в гл. 2, мы приводим в нижеследующей таблице информацию, относящуюся только к случаю $N = 3$, $m = 0$.

Предполагается, что U штейново и имеет связные пересечения со световыми прямыми. В клетке со входом (n, H^i) стоит такой пучок $\mathcal{F}(n, i)$ на U, что

$$H^i(L(U), (\mathcal{G}_L \otimes J^n/J^{n+1})_0) = H^0(U, \mathcal{F}(n, i)).$$

Обозначения в таблице таковы: $(\mathcal{G}, \nabla)$ — пучок со связностью на U, являющийся преобразованием Пенроуза для $(e^{(0)}, \mathrm{Ad} \circ \rho)$ на $L(U)_{\mathrm{rd}}$; $T^{(i)} = S^i(T_1)$ для $i \geqslant 0$, $S^{-i}\left(T_1^*\right)$ для $i < 0$; D_∇ — оператор Дирака на фоне ∇; тавтологические пучки $\mathcal{S}_\pm$ построены на $G(2;\ T_0) = M_{\mathrm{rd}}$.

Основное наблюдение над таблицей состоит в том, что по мере движения вверх по этажам $L(U)^{(n)}$ сначала набираются поля (до $n \leqslant 3$), а затем уравнения $(3 \leqslant n \leqslant 6)$. Последнее препятствие есть автоматически возникающий в суперсимметричной системе ток для обычного поля Янга — Миллса, получающегося в результате обращения в нуль нечетных координат.

Таблица когомологии ($N = 3$)

<table>
<tr><th>$\dot{n}$</th><th>H^1</th><th>H^2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\mathscr{G}_1 \otimes (\mathscr{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(1)} \oplus \oplus \mathscr{S}_- \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes T^{(-1)})$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\mathscr{G}_0 \otimes (\Lambda^2\mathscr{S}_+ \oplus T^{(-2)} \oplus \oplus \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(2)} \oplus \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(1)} \otimes T^{(-1)})$</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$\mathrm{Ker} D_{\nabla,1}$</td><td>Coker $\mathrm{D}_{\nabla,1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">где $D_{\nabla,1}\colon \mathscr{G}_1 \otimes (\mathscr{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes T^{(-3)} \oplus \mathscr{S}_- \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(3)}) \to \to \mathscr{G}_1 \otimes (\mathscr{S}_- \otimes (\Lambda^2\mathscr{S}_+)^2 \otimes T^{(-3)} \oplus \mathscr{S}_+ \otimes (\Lambda^2\mathscr{S}_-)^2 \otimes T^{(3)})$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>$\mathscr{G}_0 \otimes ((\Lambda^2\mathscr{S}_+)^2 \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(-3)} \otimes \otimes T^{(1)} \oplus \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes (\Lambda^2\mathscr{S}_-)^2 \otimes \otimes T^{(3)} \otimes T^{(-1)} \oplus \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(2)} \otimes T^{(-2)})$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>$\mathscr{G}_1 \otimes (\mathscr{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes T^{(-3)} \otimes T^{(2)} \oplus \oplus \mathscr{S}_- \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_- \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+ \otimes \otimes T^{(3)} \otimes T^{(-2)})$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>$\mathrm{Ker}_0 \nabla_3$
где $\nabla_3\colon \mathscr{G} \otimes \Omega^3 U \to \mathscr{G} \otimes \Omega^4 U$
(ковариантный дифференциал)</td></tr>
</table>

§ 4. Монады на суперпространствах и ЯМ-пучки

1. **Комбинированные ЯМ-пучки.** Цель этого параграфа — построить класс ЯМ-пучков на пространстве L и его инфинитезимальных окрестностях $L^{(m)} \subset P \times \widehat{P}$, в частности, решения суперсимметричных уравнений Янга — Миллса,

которые в силу определения 3.8 отвечают ЯМ-пучкам на $L_N^{(3-N)}$, $0 \leqslant N \leqslant 3$.

Пусть $\pi\colon L \to P$, $\widehat{\pi}\colon L \to \widehat{P}$ — стандартные проекции. Назовем ЯМ-пучок $\mathcal{E}_L$ автодуальным, если $\mathcal{E}_L = \pi^*(\mathcal{E}_P)$, где $\mathcal{E}_P$ — некоторый пучок на P или на открытом подмножестве P, содержащем $P(U) = \pi_1\pi_2^{-1}(U)$. Аналогично, назовем $\mathcal{E}_L$ антиавтодуальным, если $\mathcal{E}_L = \widehat{\pi}^*\left(\mathcal{E}_{\widehat{P}}\right)$. Наконец, назовем $\mathcal{E}_L$ комбинированным, если он содержится в тензорной алгебре, порожденной автодуальными и антиавтодуальными пучками, т. е. изоморфен прямой сумме вида $\bigoplus\limits_i \pi^*\left(\mathcal{E}_P^{(i)}\right) \otimes \widehat{\pi}^*\left(\mathcal{E}_{\widehat{P}}^{(i)}\right)$.

Комбинированные ЯМ-пучки, очевидно, определены на областях вида $P(U) \times \widehat{P}(U)$ и, в частности, на любых окрестностях $L(U)$.

Автодуальные и антиавтодуальные пучки строить легче, чем общие ЯМ-пучки, так как легче обеспечить тривиальность ограничения $\mathcal{E}_P$ на общую прямую $P^1(x) \subset P(U)$. В самом деле, по теореме Гротендика, класс такого ограничения описывается набором целых чисел: $\mathcal{E}_P \mid P^1(x) \simeq \simeq \sum\limits_i \mathcal{O}^{p_i|q_i}(m_i)$, и любой метод конструкции $\mathcal{E}_P$ позволяет контролировать значения m_i. Локально свободные пучки на квадрике $P^1(x) \times \widehat{P}^1(x)$ уже зависят от сколько угодно большого числа непрерывных параметров, и тривиальности добиться гораздо труднее.

Конструкции этого параграфа основаны на двух наблюдениях.

Во-первых, оказывается, что комбинированные пучки могут допускать нетривиальные деформации на конечной окрестности $L^{(m)}$, не продолжающиеся на высшие окрестности. Этот эффект на уровне инфинитезимальных деформаций является когомологическим, и мы начинаем с его описания, чтобы стало яснее, нетривиальность каких групп когомологий ответственна за него.

Во-вторых, устанавливается, что проблему интегрирования этих инфинитезиальных деформаций до глобальных можно иногда обойти, построив соответствующие деформированные пучки непосредственно, методом монад, как в гл. 2 были построены инстантонные пучки.

2. Расширения, деформации и когомологии. Наше исходное замечание состоит в том, что существование нетривиальных деформаций комбинированных пучков на $L^{(m)}$ связано с необращением в нуль некоторых групп когомологий автодуальных и антиавтодуальных пучков. Очевидную роль играет группа $H^1\left(L(U)^{(m)}, \pi^*\mathscr{E}_P \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}\right)$ (более стандартное обозначение для нее было бы $H^1(L(U),$ $j_m^*\left(\pi^*\mathscr{E}_P \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}\right)$, где $j_m\colon L(U)^{(m)} \to P(U) \times \hat{P}(U)$ — замкнутое вложение). Она появляется в следующих контекстах.

а) Ее элементы классифицируют расширения $0 \to \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}_1} \to \mathscr{E}_L \to \pi^*\mathscr{E}_P^* \to 0$. (В суперслучае четные элементы H^1 классифицируют такие расширения, а нечетные — расширения $\pi^*\Pi\mathscr{E}_P^*$ посредством $\hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$.) Классификация пучков $\mathscr{E}_L$, отвечающих разным элементам H^1, с точностью до изоморфизма, является, конечно, отдельной задачей; но, по крайней мере, при $H^1 \neq 0$ пучки $\mathscr{E}_L$, не изоморфные $\pi^*\mathscr{E}_P^* \oplus \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$, существуют. Они являются U-тривиальными ЯМ-пучками для любого U, для которого $\mathscr{E}_P$ и $\mathscr{E}_{\hat{P}}$ U-тривиальны, поскольку на $L(x) = P^1(x) \times \hat{P}^1(x)$ любое расширение свободных пучков свободно.

б) Элементы группы $H^1\left(L^{(m)}(U), \pi^*\mathscr{E}_P^* \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}} \oplus \pi^*\mathscr{E}_P \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}^*\right)$ классифицируют такие инфинитезимальные деформации первого порядка прямой суммы $\pi^*\mathscr{E}_P \oplus \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$ на $L^{(m)}(U)$, при которых $\pi^*\mathscr{E}_P$ и $\hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$ не деформируются. Действительно, инфинитезимальные деформации пучка $\mathscr{F}$ классифицируются группой $H^1(\mathscr{F}^* \otimes \mathscr{F})$: четным классам когомологий отвечают в суперслучае деформации с четным параметром, нечетным — с нечетным. Здесь нужно отдельно решать вопрос о возможности продолжить инфинитезимальную деформацию до глобальной в случае четного параметра. Как показывает предыдущий абзац, смешанные направления таких деформаций отвечают своего рода суперпозиции расширения $\pi^*\mathscr{E}_P$ с помощью $\hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$ и $\hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$ с помощью $\pi^*\mathscr{E}_P$. Нечетные константы в квадрате равны нулю, поэтому для них проблемы продолжения нет.

в) Инфинитезимальные деформации комбинированного пучка $\pi^*\mathscr{E}_P \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}$ классифицируются 1-когомологиями $\pi^*\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_P \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_{\hat{P}}$. Пучки эндоморфизмов (анти)автодуальных пучков сами принадлежат к тому же классу.

Второе замечание состоит в том, что основной вклад в группу $H^1\left(L(U)^{(m)}, \pi^*\mathscr{E}_P \otimes \hat{\pi}^*\mathscr{E}_{\hat{P}}\right)$ вносят группы

$H^1(P(U), \mathcal{E}_P(-m-1))$ и $H^1\big(\widehat{P}(U), \mathcal{E}_{\widehat{P}}(-m-1)\big)$. Вот самая простая ситуация. Предположим, что $L(U) = L \cap (P(U) \times \widehat{P}(U))$.

3. Предложение. *Допустим, что* $H^0(P(U), \mathcal{E}_P) = H^1(P(U), \mathcal{E}_P) = 0$, *и аналогично для* $\mathcal{E}_{\widehat{P}}$. *Тогда*

$$H^1\big(L(U)^{(m)}, \pi^*\mathcal{E}_P \otimes \widehat{\pi}^*\mathcal{E}_{\widehat{P}}\big) = H^1(P(U), \mathcal{E}_P(-m-1)) \otimes \otimes H^1\big(\widehat{P}(U), \mathcal{E}_{\widehat{P}}(-m-1)\big).$$

Доказательство. Обозначим через $s \in H^0(P \times \widehat{P}, \mathcal{O}(1, 1))$ уравнение L, напишем на $P(U) \times \widehat{P}(U)$ точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_{P\times\widehat{P}}(-m-1, -m-1) \xrightarrow{s^{m+1}} \mathcal{O}_{P\times\widehat{P}} \to j_m^*\mathcal{O}_{L^{(m)}} \to 0$$

и умножим ее тензорно на $\pi^*\mathcal{E}_P \otimes \widehat{\pi}^*\mathcal{E}_{\widehat{P}}$. Граничный дифференциал $\delta\colon H^1 \to H^2$ даст искомый изоморфизм с учетом формулы Кюннета. (При некомпактных $P(U)$, $\widehat{P}(U)$ фигурирующие тензорные произведения являются пополненными, если мы работаем в аналитической категории.) ■

Напомним сведения о когомологиях автодуальных пучков при $N = 0$. Рассмотрим отдельно два случая: когда U достаточно мало и когда U настолько велико, что $P(U) = P$.

4. Предложение. *Пусть* $U \subset M$ *— связное многообразие Штейна, и пусть любое непустое пересечение* U *с комплексным световым лучом связно и односвязно. Пусть, кроме того,* $N = 0$, $\mathcal{E}_P$ *есть* U*-тривиальный пучок на* $P(U)$, $(\mathcal{E}, \nabla)$ *— соответствующее поле Янга — Миллса на* U, $\mathcal{S}_\pm$ *— тавтологические (спинорные) расслоения на* U. *Тогда имеют место следующие изоморфизмы:*

а) $H^0(P(U), \mathcal{E}_P) = H^0(U, \operatorname{Ker}\nabla)$; $H^1(P(U), \mathcal{E}_P)$ *изоморфна (средней) группе гомологий комплекса*

$$H^0(U, \mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla} H^0(U, \mathcal{E} \otimes \Omega^1 U) \xrightarrow{\nabla_+} H^0(U, \mathcal{E} \otimes S^2\mathcal{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-),$$

где ∇_+ *— композиция* ∇ *и проекции* $\Omega^2 \to \Omega^2_+$.

б) $H^1(P(U), \mathcal{E}_P(-i)) = \operatorname{Ker} H^0(D_i)$, *где* D_i *— следующие дифференциальные операторы на* U:

D_1: $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_- \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+ \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_+ \otimes (\Lambda^2\mathcal{S}_+)^2 \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_-$

(оператор Дирака на фоне $(\mathscr{E}, \nabla)$*);*

$$D_2\colon \mathscr{E} \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+ \to \mathscr{E} \otimes (\Lambda^2\mathscr{S}_+)^2 \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_-$$

(оператор Клейна — Гордона на фоне $(\mathscr{E}, \nabla)$*; он имеет второй порядок);*

$$i \geqslant 3\colon\ D_i\colon \mathscr{E} \otimes S^{i-2}\mathscr{S}_+ \otimes \Lambda^2\mathscr{S}_+ \to \\ \to \mathscr{E} \otimes S^{i-3}\mathscr{S}_+ \otimes \mathscr{S}_- \otimes (\Lambda^2\mathscr{S}_+)^2$$

(оператор безмассовых полей спиральности $(i-2)/2$ *на фоне* $(\mathscr{E}, \nabla)$*).*

Аналогичные результаты верны для $\mathscr{E}_{\widehat{P}}$ *с заменой* $\mathscr{S}_\pm$ *на* $\mathscr{S}_\mp$. ■

Этот результат показывает, что элементы группы $H^2(L(U)^{(i-1)},\ \pi^*\mathscr{E}_P \otimes \widehat{\pi}^*\mathscr{E}_{\widehat{P}})$ можно строить, решая уравнения $D_i\psi = 0$ и $\widehat{D}_i\widehat{\psi} = 0$. Если $H^1(\mathscr{E}_P) \neq 0$, то придется вычислять $\operatorname{Ker}(H^2(s^{i+1}))$ в $\operatorname{Ker} D_i \otimes \operatorname{Ker} \widehat{D}_i$ (здесь и далее, если $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ — морфизм пучков, то $H^i(\alpha)\colon H^i(\mathscr{F}) \to H^i(\mathscr{G})$ — соответствующий морфизм когомологий).

Займемся теперь случаем $P(U) = P$ и возможностями чисто алгебраических конструкций. Далее мы считаем $N \geqslant 0$.

5. Когомологии проективного суперпространства. Структура проективного суперпространства $P = P(T_0 \oplus T_1)$, т. е. грассманиана $1|0$-подпространств в T, такова: $P_{\mathrm{rd}} = P(T_0)$, $\mathcal{O}_P = S\left(T_1^* \otimes \mathcal{O}_{P(T_0)}(-1)\right)$ (поскольку T_1 нечетно, $\mathcal{O}_P$ есть пучок грассмановых алгебр). Следующие факты являются легким обобщением стандартных (мы считаем $\dim T_0 = 4$).

а) Дуализирующий пучок $\operatorname{Ber} \Omega^1 P$ изоморфен пучку $\Pi^N\mathcal{O}_P(-4+N)$ (см. [92]).

б) $H^0(P, \mathcal{O}_P(n)) = S^n(T^*)$ при $n \geqslant 0$, 0 при $n < 0$; $H^i(P, \mathcal{O}(n)) = 0$ при всех n; $i = 1, 2$; $H^3(P, \mathcal{O}(n)) = S^{-n+N-4}(T) \otimes \operatorname{Ber} T^*$ при $n \leqslant N-4$; 0 при $n > N-4$.

в) Для любого локально свободного пучка $\mathscr{E} = \mathscr{E}_P$ на P поведение групп $H^i(P, \mathscr{E}(n))$ качественно такое же, как для $\mathcal{O}_P$: группы $H^0(P, \mathscr{E}(n))$ отличны от нуля только при $n \geqslant n_0$, $H^3(P, \mathscr{E}(n)) \neq 0$ при $n \leqslant n_3$, $H^{1,2}(P, \mathscr{E}(n)) \neq 0$ при $n_{1,2}^- \leqslant n \leqslant n_{1,2}^+$.

г) Обратимые пучки на P ранга $1|0$ (соответственно $0|1$) исчерпываются с точностью до изоморфизма пучками $\mathcal{O}(n)$ (соответственно $\Pi\mathcal{O}(n)$).

6. Монады. *Монадой* (на произвольном суперпространстве) называется комплекс локально свободных пучков $\mathscr{F}_\cdot$:

$\mathcal{F}_{-1}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{F}_0\xrightarrow{\beta}\mathcal{F}_1$, в котором α — локально прямое вложение, β — сюръекция, $\beta\circ\alpha=0$. Обозначим через $\mathcal{E}(\mathcal{F}.)=$ $=\operatorname{Ker}\beta/\operatorname{Im}\alpha$ пучок нулевых когомологий монады. Мы будем строить U-тривиальные пучки вида $\mathcal{E}(\mathcal{F}.)$, где все $\mathcal{F}_i$ суть прямые суммы обратимых пучков. Среди отвечающих им полей в качестве частных случаев содержатся инстантоны и суперинстантоны. Мы пишем $\alpha(i)$ вместо $\alpha\otimes\operatorname{id}_{\mathcal{O}(i)}\colon\mathcal{F}_{-1}(i)\to\mathcal{F}_0(i)$ и т. п.; $H^k(\alpha(i))$ означает соответствующий морфизм групп когомологий.

7. Предложение. *Пусть $\mathcal{F}.$ — монада, состоящая из прямых сумм обратимых пучков на P, $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\mathcal{F}.)$. Тогда для всех i имеем:*

$$H^0(\mathcal{E}(i))=\operatorname{Ker}H^0(\beta(i))/\operatorname{Im}H^0(\alpha(i));$$

$$H^1(\mathcal{E}(i))=\operatorname{Coker}H^0(\beta(i));$$

$$H^2(\mathcal{E}(i))=\operatorname{Ker}H^3(\alpha'(i)),\quad \alpha'\colon\mathcal{F}_{-1}\to\operatorname{Ker}\beta;$$

$$H^3(\mathcal{E}(i))=\operatorname{Ker}H^3(\beta(i))/\operatorname{Im}H^3(\alpha'(i)).$$

Доказательство. Положим $\mathcal{K}(i)=\operatorname{Ker}\beta(i)$ и напишем две точные последовательности:

$$0\to\mathcal{K}(i)\to\mathcal{F}_0(i)\xrightarrow{\beta(i)}\mathcal{F}_1(i)\to 0,$$

$$0\to\mathcal{F}_{-1}(i)\xrightarrow{\alpha'(i)}\mathcal{K}(i)\to\mathcal{E}(i)\to 0.$$

Учтем теперь, что $H^{1,2}(\mathcal{F}_a(i))=0$. В самом деле, $\mathcal{F}_a$ — прямые суммы пучков $\mathcal{O}(i)$ и $\Pi\mathcal{O}(i)$, и, следовательно, то же утверждение верно для $\mathcal{F}_a(i)$ как $\mathcal{O}_{P_{\mathrm{rd}}}$-модулей, так что мы можем воспользоваться классической теоремой Серра. Это позволяет вычислить когомологии $\mathcal{K}(i)$, пользуясь первой точной тройкой:

$$H^0(\mathcal{K}(i))=\operatorname{Ker}H^0(\beta(i)),$$

$$H^1(\mathcal{K}(i))=\operatorname{Coker}H^0(\beta(i)),$$

$$H^2(\mathcal{K}(i))=0,\quad H^3(\mathcal{K}(i))=\operatorname{Ker}H^3(\beta(i)).$$

Подставляя эти результаты в когомологическую последовательность, связанную со второй точной тройкой, получаем требуемое. ■

Для проверки U-тривиальности пучка, заданного монадой, мы будем пользоваться следующим критерием.

8. Предложение. *Пусть $\mathcal{F}.$ — монада на P^1 со следующими свойствами: $\mathcal{F}_0$ свободен, $H^0(\mathcal{F}_{-1})=H^0(\mathcal{F}_1^*)=$ $=0$. Тогда определено отображение* $\varepsilon=\varepsilon(\mathcal{F}.)$:

$H^1(\mathcal{F}_{-1}(-1)) \to H^0(\mathcal{F}_{-1}(-1))$, *которое является изоморфизмом, если и только если* $\mathcal{E}(\mathcal{F}_\cdot)$ *свободен* **на P^1.**

Доказательство. Как выше, положим $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}\,\beta$. Из $0 \to \mathcal{K}(-1) \to \mathcal{F}_0(-1) \to \mathcal{F}_1(-1) \to 0$ находим $H^0(\mathcal{F}_1(-1)) = H^1(\mathcal{K}(-1))$, $H^0(\mathcal{K}(-1)) = 0$. Из $0 \to \mathcal{F}_{-1}(-1) \to \mathcal{K}(-1) \to \mathcal{E}(-1) \to 0$ получаем морфизм $H^1(\mathcal{F}_{-1}(-1)) \to H^1(\mathcal{K}(-1)) \simeq H^0(\mathcal{F}_1(-1))$, который, по определению, и есть ε. Его ядро и коядро суть соответственно $H^0(\mathcal{E}(-1))$ и $H^1(\mathcal{E}(-1))$. Но эти две группы обращаются в нуль, если и только если $\mathcal{E}$ свободен. ■

9. m-монады на P. Назовем *m-монадой* $(m \geqslant 0)$ комплекс вида

$$\mathcal{F}_\cdot\colon\ F_{-1} \otimes \mathcal{O}_P(-m-1) \xrightarrow{\alpha} F_0 \otimes \mathcal{O}_P \xrightarrow{\beta} F_1 \otimes \mathcal{O}_P(m+1),$$

где F_i — линейные (супер)пространства. Положим $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}(\mathcal{F}_\cdot)$. Из предложения 6 находим для $0 \leqslant i \leqslant m$:

$$H^1(P, \mathcal{E}_P(-i-1)) = F_1 \otimes S^{m-i}(T^*).$$

Таким образом, у нас есть запас одномерных когомологий для конструкции нетривиальных расширений и деформаций. Как будет показано ниже, пучок $\mathcal{E}(\mathcal{F}_\cdot)$ может быть U-тривиальным для непустых U.

Условия предложения 3 проверяются по монаде так:

$$\left.\begin{aligned} H^0(P, \mathcal{E}_P) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, H^0(\beta) = 0, \\ H^1(P, \mathcal{E}_P) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Coker}\, H^0(\beta) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_0 \xrightarrow[\sim]{H^0(\beta)} F_1 \otimes S^{m+1}(T^*).$$

Эти же условия выполнены для пучка $\mathcal{E}_P^*$, который определяется двойственной монадой, если изоморфизмом является также отображение $F_0^* \xrightarrow{H^0(\alpha^*)} F_{-1}^* \otimes S^{m+1}(T^*)$. Монаду с этими двумя свойствами назовем *максимальной.*

10. m-монады на $L^{(l)}$. Рассмотрим на $P \times \widehat{P}$ диаграмму пучков следующего вида:

$$\mathcal{F}_\cdot\colon\ F_{-1}^+ \otimes \mathcal{O}(-m-1, 0) \oplus F_{-1}^- \otimes \mathcal{O}(0, -m-1) \xrightarrow{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\alpha} (F_0^+ \oplus F_0^-) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\beta} F_1^+ \otimes \mathcal{O}(m+1, 0) \oplus F_1^- \otimes \mathcal{O}(0, m+1),$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^+ & 0 \\ 0 & \alpha^- \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta^+ & \gamma^+ \\ \gamma^- & \beta^- \end{pmatrix}$. Здесь и ниже, записывая морфизм в виде блочной матрицы, мы подразумеваем, что она умножается слева на столбец компонент. В частности,

$$\gamma^+ : F_0^- \otimes \mathcal{O} \to F_1^+ \otimes \mathcal{O}(m+1, 0),$$

$$\gamma^- : F_0^+ \otimes \mathcal{O} \to F_1^- \otimes \mathcal{O}(0, m+1).$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\beta^+\alpha^+ = 0, \quad \beta^-\alpha^- = 0,$$

$$\gamma^+\alpha^- = s^{i+1}\gamma', \quad \gamma^-\alpha^+ = s^{i+1}\gamma''.$$

Пусть, кроме того, α является локально прямым вложением, β — сюръекцией. Тогда ограничение $\mathscr{F}_\cdot|L^{(i)}$ является монадой и потому определяет некоторый пучок на $L^{(i)}$. Назовем такие монады *стандартными*.

Монада $\mathscr{F}_\cdot$ является деформацией прямой суммы m-монад, поднятых с P и $\widehat{P}$ соответственно. Действительно, пусть $\mathscr{F}_\cdot(t_+, t_-)$ — комплекс, который получается из $\mathscr{F}_\cdot$ заменой $\gamma^\pm$ на $t_\pm\gamma^\pm$. При $t_\pm = 0$ это прямая сумма: $\mathscr{F}_\cdot(0, 0) = \mathscr{F}_\cdot^+ \oplus \mathscr{F}_\cdot^-$. Если, скажем, $t_- \neq 0$, $t_+ = 0$, то имеется естественное вложение комлексов $\mathscr{F}_\cdot^- \subset \mathscr{F}_\cdot(0, t_-)$, которому отвечает расширение $0 \to \mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot^-) \to \mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot(0, t_-)) \to \mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot^+) \to 0$. Класс этого расширения $e(t_-)$, зависящий от t_-, лежит в группе

$$\begin{aligned} &H^1(L^{(i)}, \mathscr{E}^*(\mathscr{F}_\cdot^+) \otimes \mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot^-)) = \\ &\quad = H^1(P, \mathscr{E}_P^*(-i-1)) \otimes H^1(\widehat{P}, \mathscr{E}_{\widehat{P}}(-i-1)) = \\ &\qquad\qquad = (F_{-1}^+)^* \otimes S^{m-i}(T^*) \otimes F_1^- \otimes S^{m-i}(T) \end{aligned}$$

(мы считаем, что монады $\mathscr{F}_\cdot^\pm$ максимальны). С другой стороны, на $P \times \widehat{P}$ у нас есть морфизм $t_-\gamma^-\alpha^+ = t_- s^{i+1}\gamma''$: $F_{-1}^+ \otimes \mathcal{O}(-m-1, 0) \to F_1^- \otimes \mathcal{O}(0, m+1)$, и ясно, что $t_-\gamma''$ можно считать элементом того же пространства $\mathrm{Hom}(F_{-1}^+, F_1^-) \otimes H^0(P \times \widehat{P}, \mathcal{O}(m-i, m-i))$, в котором лежит $e(t_-)$. Нетрудно предположить и можно проверить, что $e(t_-) = \mathrm{const} \cdot t_-\gamma''$ при этом отождествлении.

Поэтому для проверки того, что монады $\mathscr{F}_\cdot$ при всевозможных $t_\pm\gamma^\pm$, где $t_\pm^2 = 0$, реализуют все инфинитезимальные деформации $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot^+ \oplus \mathscr{F}_\cdot)^-$, достаточно убедиться, что соответствующие пары (γ', γ'') могут пробегать все допустимые значения. Ограничимся случаем, когда $\mathscr{F}_\cdot^\pm$ максимальны. Тогда монаду $\mathscr{F}_\cdot$ можно записать в следующей форме, которую мы тоже будем называть стандартной:

$$\begin{tikzcd}
F^{+}_{-1}\otimes\mathcal{O}(-m-1,\,0)\oplus F^{-}_{-1}\otimes\mathcal{O}(0,\,-m-1) \arrow[d, "\begin{pmatrix} a^{+} & 0 \\ 0 & a^{-}\end{pmatrix}"] & \\
\mathcal{O}\otimes\left[F^{+}_{-1}\otimes S^{m+1}(T)\oplus F^{-}_{-1}\otimes S^{m+1}(T^{*})\right] \arrow[r, "B"] & \mathcal{O}\otimes\left[F^{+}_{1}\otimes S^{m+1}(T^{*})\oplus F^{-}_{1}\otimes S^{m+1}(T)\right] \arrow[d, "\begin{pmatrix} b^{+} & 0 \\ 0 & b^{-}\end{pmatrix}"] \\
 & F^{+}_{1}\otimes\mathcal{O}(m+1,\,0)\oplus F^{-}_{1}\otimes\mathcal{O}(0,\,m+1).
\end{tikzcd}$$

В этой записи морфизмы $a^{\pm}$, $b^{\pm}$ определены раз навсегда, а параметрами монады являются элементы обратимого постоянного оператора $B=\begin{pmatrix} B^{+} & C^{+} \\ C^{-} & B^{-}\end{pmatrix}$. Точнее,

$$a^{+}(f^{+}\otimes t)=f^{+}\otimes h(ts^{m+1}),$$

где $f^{+}\in F^{+}_{-1}$, t — сечение $\mathcal{O}(-m-1,\ 0)$, $h\colon\mathcal{O}(0,\ m+1)\to S^{m+1}(T)\otimes\mathcal{O}$ — канонический морфизм, и аналогично для a^{-}. Далее, b^{+} определяется тем, что $H^{0}(b^{+})$ есть тождественное отображение $F^{+}_{1}\otimes S^{m+1}(T^{*})$. Матрица B описывает тождественный изоморфизм между двумя естественными реализациями пучка $\mathcal{F}_{0}$ монады, в которых α и β соответственно принимают канонический вид.

Чтобы убедиться в существовании монады с выбранными γ', γ'', нужно воспользоваться свободой в выборе $C^{\pm}$ ($B^{\pm}$ определяются монадами $\mathcal{F}^{\pm}_{\cdot}$). Скажем, C^{-} может быть любым элементом в $\mathrm{Hom}(F^{+}_{-1},\ F^{-}_{1})\otimes S^{m+1}(T^{*})\otimes S^{m+1}(T)$, например, $\gamma' s^{i+1}$, $i\leqslant m$.

Следующий результат показывает, что монады из некоторого естественного класса являются стандартными.

11. Теорема. *Предположим, что пучок когомологий монады вида*

$$\mathcal{F}_{\cdot}\colon \bigoplus_{a+b=m+1} F^{(a,b)}_{-1}\otimes\mathcal{O}(-a,\,-b)\xrightarrow{\alpha} F_{0}\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{\beta}\bigoplus_{a+b=m+1} F^{(a,b)}_{1}\otimes\mathcal{O}(a,\,b),$$

где $F^{(a,b)}_{j}$ $(a,b\geqslant 0)$ — *линейные суперпространства, опре-*

делен на $L^{(i)}$ *и является* U*-свободным для непустого* U. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *Монада* $\mathcal{F}.$ *изоморфна стандартной; в частности, она определяет две монады* $\mathcal{F}^{\pm}_{\cdot}$, *поднятые соответственно с* P *и* $\widehat{P}$.

б) *Пучок* $\mathcal{E}(\mathcal{F}.)\,|\,L(x)$ *свободен, если и только если* $\mathcal{E}(\mathcal{F}^{+}_{\cdot})\,|\,P^1(x)$ *и* $\mathcal{E}(\mathcal{F}^{-}_{\cdot})\,|\,\widehat{P}^1(x)$ *свободны.*

Доказательство. Прежде всего, $F_{-1}^{(-a,-b)}=\{0\}$ при $ab>0$. Для доказательства этого установим следующее: если $F_{-1}^{(a,b)}\neq\{0\}$ для некоторой пары (a, b), $ab>0$, то $H^1(\mathcal{E}(\mathcal{F}.)(-1,-1)\,|\,L(x))\neq 0$ для любой квадрики $L(x)\subset\subset L$, так что $\mathcal{E}(\mathcal{F}.)\,|\,L(x)$ не может быть свободен. Будем писать $\mathcal{F}_i(x)$ вместо $\mathcal{F}_i|L(x)$ и т. п.; из $0\to\mathcal{K}(x)\to\to\mathcal{F}_0(x)\to\mathcal{F}_1(x)\to 0$ следует, что $H^2(\mathcal{K}(x)(-1,-1))=0$; из $0\to\mathcal{F}_{-1}(x)\to\mathcal{K}(x)\to\mathcal{E}(x)\to 0$ видно, что δ: $H^1(\mathcal{E}(x)(-1,-1))\to H^2(\mathcal{F}_{-1}(-1,-1))$ сюръекция. Наконец, $H^2(F_{-1}\otimes\mathcal{O}_{L(x)}(-a-1,-b-1))\neq 0$ при $a, b>0$.

Применяя этот результат к двойственной монаде, находим, что из U-тривиальности $\mathcal{E}(\mathcal{F}^{*}_{\cdot})$ следует также, что $F_1^{(a,b)}=\{0\}$ при $a, b>0$. Таким образом, $\mathcal{F}.$ на $L^{(i)}$ имеет вид

$$F^{+}_{-1}\otimes\mathcal{O}(-m-1,0)\oplus F^{-}_{-1}\otimes\mathcal{O}(0,-m-1)\xrightarrow{(\alpha^+,\ \alpha^-)}$$

$$\xrightarrow{(\alpha^+,\alpha^-)}F_0\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta^+\\ \beta^-\end{pmatrix}}F_1^{+}\otimes\mathcal{O}(m+1,0)\oplus F_1^{-}\otimes\mathcal{O}(0,m+1).$$

Имеем $\beta^+\alpha^++\beta^+\alpha^-=0$, $\beta^-\alpha^++\beta^-\alpha^-=0$. Но $\beta^+\alpha^+$ есть умножение на сечение пучка $\mathrm{Hom}(F^{\pm}_{-1}, F_1^{+})\otimes\mathcal{O}(2m+2,0)$, а $\beta^+\alpha^-$ — умножение на сечение пучка $\mathrm{Hom}(F^{\pm}_{-1}, F_1^{-})\otimes\otimes\mathcal{O}(m+1,m+1)$. Следовательно, $\beta^+\alpha^+=0$ и $\beta^+\alpha^-=0$ на $L^{(i)}$; аналогично $\beta^-\alpha^+=0$, $\beta^-\alpha^-=0$.

Пусть F_0^{+} (соответственно F_0^{-}) — такое минимальное подпространство в F_0, что образ α^+ (соответственно α^-) содержится в $F_0^{+}\otimes\mathcal{O}$ (соответственно $F_0^{-}\otimes\mathcal{O}$). Так как (α^+, α^-) — локально прямое вложение, имеем $F_0^{+}\cap F_0^{-}==\{0\}$. Можно считать, что $F_0=F_0^{+}\oplus F_0^{-}$ (если это не так, можно переопределить, скажем, F_0^{-}, добавив к нему недостающее дополнение до F_0). Тогда монада приобретает стандартный вид:

$$F_0=F_0^{+}\oplus F_0^{-},\quad \alpha=\begin{pmatrix}\alpha^+ & 0\\ 0 & \alpha^-\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta^+ & \gamma^+\\ \gamma^- & \beta^-\end{pmatrix}.$$

Все ее пучки и морфизмы однозначно продолжаются с $L^{(i)}$ на $P\times\widehat{P}$, и лишь соотношения, скажем, $\gamma^+\alpha^-=0$ на $L^{(i)}$, превращаются в $\gamma^+\alpha^-=s^{i+1}\gamma'$ на $P\times\widehat{P}$, поскольку продолжение $\gamma^+\alpha^-$ есть умножение на сечение пучка $\mathrm{Hom}\left(F^+_{-1}, F^+_1\right)\otimes\mathcal{O}\,(m+1,\ m+1)$.

Выясним теперь, для каких $L(x)$ свободен пучок $\mathcal{E}(x)$. Мы будем пользоваться следующим критерием свободы: $H^i(\mathcal{E}(x)(\varepsilon,\ \eta))=0$ для всех i и $(\varepsilon,\ \eta)=(-1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ -1)$. Его необходимость очевидна. Достаточность получится, если написать резольвенту Кошуля геометрического слоя $\mathcal{E}(x)$ в любой точке $(u,\ v)\in L(x)$ и убедиться, что она приводит к канонической тривиализации $\mathcal{E}(x)$, устанавливая изоморфизм $H^0(\mathcal{E}(x))$ с этим слоем.

Теперь, как обычно, распишем монаду $\mathcal{F}_{\cdot}(\varepsilon,\eta)$, ограниченную на $L(x)$:

$$0\to F^+_{-1}\otimes\mathcal{O}_{L(x)}(-m-1+\varepsilon,\ \eta)\oplus$$

$$\oplus\ F^-_{-1}\otimes\mathcal{O}_{L(x)}(\varepsilon,\ -m-1+\eta)\xrightarrow{\widetilde{\alpha}(\varepsilon,\eta)}\mathcal{K}\,(x)\,(\varepsilon,\ \eta)\to$$

$$\to\mathcal{E}\,(x)\,(\varepsilon,\ \eta)\to 0,$$

$$0\to\mathcal{K}\,(x)\,(\varepsilon,\ \eta)\to\left(F^+_0\oplus F^-_0\right)\otimes\mathcal{O}_{L(x)}\,(\varepsilon,\ \eta)\to$$

$$\to F^+_1\otimes\mathcal{O}_{L(x)}\,(m+1+\varepsilon,\ \eta)\oplus F^-_1\otimes\mathcal{O}_{L(x)}\,(\varepsilon,\ m+1+\eta)\to 0.$$

Из второй тройки находим изоморфизмы:

$$\delta^+(\beta):\ H^1(\mathcal{K}\,(x)\,(-1,\ 0))\xrightarrow{\sim}F^+_1\otimes H^0\,(\mathcal{O}_{L(x)}\,(m,0)),$$

$$\delta^-(\beta):\ H^1(\mathcal{K}\,(x)\,(0,\ -1))\xrightarrow{\sim}F^-_1\otimes H^0\,(\mathcal{O}_{L(x)}\,(0,m)),$$

а все остальные группы $H^i(\mathcal{K}(x)(\varepsilon,\ \eta))$ нулевые. Поэтому $H^i(\mathcal{E}(x)(-1,\ -1))=0$ для всех i, а обращение в нуль оставшихся групп равносильно тому, что следующие отображения являются изоморфизмами:

$$\delta^+(\beta)\circ H^1\,(\widetilde{\alpha}\,(-1,0)):\ F^+_{-1}\otimes H^1\,(\mathcal{O}_{L(x)}\,(-m-2,\ 0))\to$$

$$\to F^+_1\otimes H^0\,(\mathcal{O}_{L(x)}\,(m,\ 0)),$$

$$\delta^-(\beta)\circ H^1\,(\widetilde{\alpha}\,(0,\ -1)):\ F^-_{-1}\otimes H^1\,(\mathcal{O}_{L(x)}\,(0,\ -m-2))\to$$

$$\to F^-_{-1}\otimes H^0\,(\mathcal{O}_{L(x)}\,(0,m)).$$

При $\gamma^\pm=0$, т. е. при $\beta=\begin{pmatrix}\beta^+ & 0\\ 0 & \beta^-\end{pmatrix}$, два последних отображения, очевидно, суть, $\varepsilon\left(\mathcal{F}^+_{\cdot}(x)\right)$ и $\varepsilon\left(\mathcal{F}^-_{\cdot}(x)\right)$ в обозначениях предложения 8. Мы покажем сейчас, что от $\gamma^\pm$ они на самом деле не зависят, так что свобода $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot(x))$ равносильна одновременной свободе $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot^+(x))$ и $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot^-(x))$.

В самом деле, зададим класс когомологий из $H^1(\mathscr{F}_{-1}(x)(-1,\ 0))$, скажем, коциклом в обычном двухэлементном покрытии (поднятом с $P^1(x)$ на $P^1(x)\times\widehat{P}^1(x)$). Чтобы применить к нему $\delta^+(\beta)\circ H^1(\widetilde{\alpha}(-1,\ 0))$, мы должны расщепить этот коцикл в $\mathscr{F}_0(x)(-1,\ 0)$ и затем применить к одному из двух слагаемых морфизм $H^0(\beta(x)(-1,\ 0))$. Но от $\gamma^\pm$ зависит лишь та компонента морфизма $\beta(x)(-1,\ 0)$, которая попадает в $F_1^-\otimes\mathcal{O}_{L(x)}(-1,\ m+1)$, и H^0 от этой компоненты есть нуль. Ср. вычисления в п. 2 следующего параграфа.

12. Замечания. а) Существенно, что деформации комбинированных пучков, которые мы построили на $L^{(i)}$, остаются петривиальными после ограничения на $L^{(0)}=L$. В самом деле, из доказательства предложения 3 и отождествлений п. 10 видно, что отображение ограничения групп H^2 с $L^{(i)}$ на L сводится к умножению на s^i:

$$S^{m-i}(T\oplus T^*)\to S^m(T\oplus T^*).$$

б) Вероятно, пучок $\mathscr{E}_L$ на $L^{(m)}$, заданный m-монадой с максимальными $\mathscr{F}_\cdot^\pm$ и $(\gamma',\ \gamma'')\neq(0,\ 0)$, не продолжаем на $L^{(m+1)}$. Для проверки этого следует вычислить препятствие к продолжению, которое лежит в $H^2(L,\mathscr{E}nd\,\mathscr{E}_L^{(0)}(-m-1,\ -m-1))$.

§ 5. Некоторые вычисления в координатах

1. Простейшие *m*-монады на *P* в координатах. Слегка изменим обозначения § 1: пусть $(z_1,\ \ldots,\ z_4;\ \zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_N)$ — базис T^*, и пусть (Z^a) — базис $S^{m+1}(T^*)$, состоящий из мономов степени $m+1$: $Z^a=z_1^{a_1}\ldots z_4^{a_4}\zeta_1^{\alpha_1}\ldots\zeta_N^{\alpha_N}$, где $a_i\geqslant 0$, $\alpha_i=0$ или 1, $\sum a_i+\sum\alpha_j=m+1$. Положим $A(Z)=(Z^a)^t$ (столбец мономов), $B(Z)=\left(\sum\limits_b\beta_b^aZ^b\right)$ (строка полиномов), где константы β_b^a, кроме требования четности $B(Z)$ в смысле супералгебры, удовлетворяют двум условиям: а) $\sum\limits_{a+b=c}\beta_b^a=0$ для любого c; б) элементы $B(Z)$ порождают $S^{m+1}(T^*)$. Тогда диаграмма

$$\mathscr{F}_\cdot:\quad \mathcal{O}_P(-m-1)\xrightarrow{A(Z)}\mathcal{O}_P^{r(m)|s(m)}\xrightarrow{B(Z)}\mathcal{O}_P(m+1),$$

где $r(m)|s(m) = \dim S^{m+1}(T^*)$, является максимальной монадой на P и так получаются все максимальные монады с $\dim F_{-1} = 1$.

Заменив константы β_b^a матрицами отображений $F_{-1}^+ \to F_1^+$, мы получим общий случай.

2. Критерий U-тривиальности. Рассмотрим прямую P^1: $\{z_3 = z_4 = 0;\ \zeta_1 = \ldots = \zeta_N = 0\}$ и выразим через (β_b^a) условие того, что ограничение $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot)$ на эту прямую свободно. С этой целью применим предложение 3.8, но сначала упростим $\mathscr{F}_\cdot | P^1$. Имеем $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0' \oplus \mathscr{F}_0''$, где $\mathscr{F}_0'$ порожден мономами $z_1^{a_1} z_2^{a_2}$, $a_1 + a_2 = m + 1$, а $\mathscr{F}_0''$ — всеми остальными мономами. Соответственно $A(Z) = \begin{pmatrix} A'(Z) \\ A''(Z) \end{pmatrix}$, $B(Z) = (B'(Z) \,|\, B''(Z))$, причем $A''(Z)|P^1 = 0$, $B''(Z)|P^1 = 0$. Поэтому $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot | P^1)$ содержит пучок $\mathscr{F}_0''|P^1$ в качестве прямого слагаемого, и достаточно выяснить, когда свободен пучок когомологий монады на P^1 вида

$$\mathscr{G}_\cdot\colon\ \mathscr{O}_{P^1}(-m-1) \xrightarrow{A'(Z)} \mathscr{O}_{P^1}^{m+2} \xrightarrow{B'(Z)} \mathscr{O}_P(m+1).$$

Это зависит лишь от $\left(\beta_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}\right)$ с $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = m + 1$. Вычислим отображение $\varepsilon\ (\mathscr{G}_\cdot)$: $H^1(\mathscr{G}_{-1}(-1)) \to H^0(\mathscr{G}_1(-1))$ из предложения 3.8. В комплексе Чеха покрытия U_i: $\{z_i \neq 0\}$ базис $H^1(\mathscr{G}_{-1}(-1)) = H^1(\mathscr{O}(-m-2))$ представлен классами коциклов

$$h_i(U_{12}) = z_1^{-i} z_2^{i-m-2}, \qquad i = 1, \ldots, m+1.$$

Мы должны рассмотреть их как коцепи со значениями в $\mathscr{K}(-1)$ и явно расщепить их образы в $\mathscr{F}_0(-1)$ после применения $A'(Z)$. Это расщепление таково:

$$z_1^{-i} z_2^{i-m-2} \overset{A'(Z)}{\longmapsto} \left(z_1^{a_1-i} z_2^{i-a_1-1}\right)^t_{a_1=0,\ldots,m+1} =$$

$$= \left(\ldots z_1^{a_1-i} z_2^{i-a_1-1} \ldots \Big|_{a_1 \leqslant i-1} 0 \ldots 0\right)^t +$$

$$+ \left(0 \ldots 0 \Big| \ldots z_1^{a_1-i} z_2^{i-a_1-1} \ldots\right)^t_{a_1 \geqslant i}.$$

Справа первое слагаемое регулярно на U_1, второе — на U_2. Окончательно:

$$\varepsilon(h_i) = B'(Z)\, h_i^2 = -B'(Z)\, h_i^1 =$$

$$= -\sum_{a_1=0}^{i-1} \sum_{b_1=0}^{m+1} \beta_{b_1, m+1-b_1}^{a_1, m+1-a_1} z_1^{a_1+b_1-i} z_2^{m+i-a_1-b\ 1}$$

Пучок $\mathscr{E}(\mathscr{F}_\cdot)|P^1$ свободен, если и только если все многочлены $\varepsilon(h_i)$, $i=1, \ldots, m+1$, линейно независимы. Множество таких β открыто по Зарискому. Чтобы убедиться в его непустоте, наложим дополнительные соотношения: $\beta^{a_1a_2}_{b_1b_2}=0$, если $(a_1+b_1,\ a_2+b_2)\neq(m+1,\ m+1)$, иначе $\beta^{a_1a_2}_{b_1b_2}=\beta(a_1)-\gamma$. Пусть, сверх того, $\sum\limits_{a_1=0}^{m+1}\beta(a_1)=(m+2)\gamma$: это обеспечит условие $\sum\limits_{a+b=c}\beta^a_b=0$ для всех a, b вида $(a_1,\ a_2,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Условие свободы превращается в систему неравенств $\sum\limits_{a_1=0}^{i-1}(\beta(a_1)-\gamma)\neq 0$ для всех $i\leqslant m+1$, поскольку

$$\varepsilon(h_i) = -\left(\sum_{a_1=0}^{i-1}(\beta(a_1)-\gamma)\right) z_1^{m+1-i} z_2^{i-1}, \quad i=1, \ldots, m+1.$$

Чтобы достроить такую подматрицу (β^a_b) до полной матрицы монады, можно положить $\beta^a_b=0$, если a (или b) имеет вид $(a_1,\ a_2,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, а b (или a) не имеет такого вида. Тогда элементы $B(Z)$ будут полиномами либо только от z_1, z_2, либо только от всех остальных координат, и требования на вторую часть полиномов можно удовлетворить независимо.

3. Простейшие m-монады на $L^{(m)}$ в координатах. Пусть (W^a) — двойственный базис мономов в $S^{m+1}(T)$ от элементов $(w_1,\ \ldots,\ w_4,\ \nu_1,\ \ldots,\ \nu_N)$. Уравнение L пусть будет $s=\sum z_a w_a+\sum\zeta_\alpha\nu_\alpha=0$. Положим $s^{m+1}=\sum\limits_a C(a,m)Z^aW^a$ в $S(T\oplus T^*)$. Пусть далее $A_+(Z)=(Z^a_\cdot)^t$, $A_-(W)=(W^a)^t$, $B_+(Z)=\left(\sum\limits_b\beta^a_{b+}Z^b\right)$, $B_-(W)=\left(\sum\limits_b\beta^a_{b-}W^b\right)$. Наконец,

$$\Gamma_+(Z)=t_+\left(C(a,m)Z^a\right),$$

$$\Gamma_-(W)=t_-\left((-1)^{\tilde{a}}C(a,m)W^a\right),$$

где $t_\pm$ — константы, $\tilde{a}$ — четность W^a, т. е. $\sum\alpha_i$. Если $B_\pm$ удовлетворяют условиям п. 1, то диаграмма на $P\times\widehat{P}$

$$\mathscr{F}_\cdot : \mathcal{O}(-m-1,\ 0)\oplus\mathcal{O}(0,\ -m-1)\xrightarrow{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\alpha}\mathcal{O}\otimes\left[S^{m+1}(T)\oplus S^{m+1}(T^*)\right]\xrightarrow{\beta}\mathcal{O}(m+1,\ 0)\oplus\mathcal{O}(0, m+1),$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_{+}(Z) & 0 \\ 0 & A_{-}(W) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B_{+}(Z) & \Gamma_{+}(Z) \\ \Gamma_{-}(W) & B_{-}(W) \end{pmatrix},$$

определяет монаду на $L^{(m)}$, поскольку $\Gamma_{+}A_{-} = t_{+}s^{m+1}$, $\Gamma_{-}A_{+} = t_{-}s^{m+1}$ (кроме исключительных значений $t_{\pm}$, для которых, возможно, β не сюръективен). U — тривиальность такой монады обеспечивается предыдущими пунктом и теоремой 4.11.

4. Ранги простейших монад. Самое простое решение вакуумных уравнений Янга — Миллса с точки зрения структуры монады получается при $m = 3$, $N = 0$. Поскольку $\dim S^4(\mathbf{C}^4) = 35$, ранг $\mathscr{E}_L$ равен 66.

Более приемлемая по величине калибровочная группа получается для суперсимметричного случая: $m = 0$, $N = 3$. Это группа GL $(4|6;\ \mathbf{C})$.

В действительности можно получить довольно точные сведения о самом пучке $\mathscr{E} = \pi_{2*}\pi_1^{*}\mathscr{E}_L$, а не только о его ранге, где $\mathscr{E}_L$ — пучок когомологий стандартной m-монады, используя идею вычислений в п. 2. Будем писать $\mathscr{S}_{+} = \mathscr{S}^{2|0}$, $\mathscr{S}_{-} = \widetilde{\mathscr{S}}^{2|0}$ как в чисто четном случае; $\mathscr{S}_{+}^{\perp} = \widetilde{\mathscr{S}}^{2|N}$, $\mathscr{S}_{-}^{\perp} = \mathscr{S}^{2|N}$.

Положим $\pi_1^{*}(\mathscr{F}_i) = \mathscr{G}^i$ и будем писать α, β вместо $\pi_1^{*}(\alpha)$, $\pi_1^{*}(\beta)$. Тогда $\mathscr{E} = \pi_{2*}\mathscr{E}_F$, где $\mathscr{E}_F = \mathscr{E}(\mathscr{G}.)$.

Обозначим через $\mathscr{G}_0' \subset \mathscr{G}_0$ минимальный локально свободный пучок, содержащий образ α. Если α реализован в стандартной форме (п. 4.10), то $\mathscr{G}_0' = F_{-1}^{+} \otimes S^{m+1}(\mathscr{S}_{+F}) \oplus F_{-1}^{-} \otimes S^{m+1}(\mathscr{S}_{-F})$, где $\mathscr{S}_{\pm F} = \pi_2^{*}(\mathscr{S}_{\pm})$, а вложение $\mathscr{G}_0' \subset \mathscr{G}_0$ индуцировано вложениям $\mathscr{S}_{+F} \subset \mathcal{O}_F \otimes T$, $\mathscr{S}_{-F} \subset \mathcal{O}_F \otimes T^*$. Положим $\beta' = \beta \,|\, \mathscr{G}_0'$.

5. Предложение. *Пучок Янга — Миллса $\mathscr{E}$ на M, носитель связности ∇, имеет следующую структуру. Определена точная последовательность $0 \to \mathscr{E}'' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}' \to 0$, где*

$$\mathscr{E}' = F_{-1}^{+} \otimes S^{m-1}(S_{+}) \otimes \Lambda^2 \mathscr{S}_{+} \oplus F_{-1}^{-} \otimes S^{m-1}(\mathscr{S}_{-}) \otimes \otimes \Lambda^2(\mathscr{S}_{-}) \quad \text{при } m \geqslant 1;$$

$$\mathscr{E}' = 0 \qquad \text{при } m = 0;$$

$$\mathscr{E}'' = F_1^{+} \otimes S_{+}^{\perp} \cdot S^m(T^* \otimes \mathcal{O}_M) \oplus F_1^{-} \otimes \mathscr{S}_{-}^{\perp} \cdot S^m(T \otimes \mathcal{O}_M).$$

Далее, предположим, что над открытым подмножеством $\pi_2^{-1}(U)$, *где* $U \subset M$, *морфизм* $\beta'\colon \mathcal{G}_0' \to \mathcal{G}_1$ *сюръективен. Тогда на* U *указанная точная последовательность канонически расщепляется:* $\mathcal{E}|U = \mathcal{E}'|U \oplus \mathcal{E}''|U$.

Частный случай. Простейшим неавтодуальным решением суперсимметричных ($N = 3$) уравнений Янга — Миллса является связность на пучке $\mathcal{S}^{\perp}_{+} \oplus \mathcal{S}^{\perp}_{-}$, «взаимодействующая» сумма суперинстантона и суперантиинстантона.

Доказательство. Из точной последовательности $0 \to \mathcal{K} = \operatorname{Ker}\beta \to \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}_1 \to 0$ на F находим $\pi_{2*}\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\pi_{2*}(\beta)$ и $\mathbf{R}^1\pi_{2*}\mathcal{K} = 0$. Ядро морфизма $\pi_{2*}(\beta)$ естественно отождествляется с $\mathcal{E}''$, если записать $\mathcal{F}_{\cdot}$ в стандартной форме и соответственно реализовать $\mathcal{G}_0$ как $F_1^+ \otimes S^{m+1}(T^*) \otimes \mathcal{O}_F \oplus F_1^- \otimes S^{m+1}(T) \otimes \mathcal{O}_F$, а β — как морфизм, у которого $H^0(\beta)$ на L есть тождественное отображение.

После этого из точной последовательности $0 \to \mathcal{G}_{-1} \to \mathcal{K} \to \mathcal{E}_F \to 0$ получаем

$$0 \to \pi_{2*}\mathcal{K} = \mathcal{E}'' \to \mathcal{E} \to R^1\pi_{2*}\mathcal{G}_{-1} \to 0.$$

Стандартные изоморфизмы $\mathbf{R}^1\pi_{2*}\mathcal{O}_F(-m-1, 0) = S^{m-1}(\mathcal{S}_+) \otimes \Lambda^2\mathcal{S}_+$ и аналогично для $\mathcal{O}(0, -m-1)$ позволяют отождествить $\mathbf{R}^1\pi_{2*}\mathcal{G}_{-1}$ с $\mathcal{E}'$. Остается указать каноническое расщепление этой точной последовательности над U.

Рассмотрим над $\pi_2^{-1}(U)$ монаду $\mathcal{G}'_{\cdot}\colon 0 \to \mathcal{G}_{-1} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}'_0 \xrightarrow{\beta'} \mathcal{G}_1 \to 0$. Положим $\mathcal{K}' = \operatorname{Ker}\beta'$; вычисляя, как раньше, находим $\pi_{2*}\mathcal{K}' = 0$ и $\pi_{2*}(\mathcal{E}(\mathcal{G}'_{\cdot})) = \mathbf{R}^1\pi_{2*}\mathcal{G}_{-1} = \mathcal{E}'$. Вложение монад $\mathcal{G}'_{\cdot} \subset \mathcal{G}_{\cdot}$ определяет вложение $\mathcal{E}(\mathcal{G}'_{\cdot}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{G}_{\cdot})$ и затем $\mathcal{E}' = \pi_{2*}(\mathcal{E}(\mathcal{G}')) \subset \pi_{2*}(\mathcal{E}(\mathcal{G})) = \mathcal{E}$, что и расщепляет нашу точную тройку.

§ 6. Суперпространства флагов классического типа и экзотические суперпространства Минковского

1. Постановка задачи. Суперпространство Минковского $M = G(2|0, 2|N; T^{4|N})$, поля на котором мы до сих пор рассматривали, обладает следующими двумя свойствами:

а) M является компактным однородным комплексным суперпространством — на нем транзитивно действует супергруппа $\mathrm{GL}(T)$;

б) $M_{\mathrm{rd}} = G(2, \mathbf{C}^4)$ — модель Пенроуза.

Естественно поставить общую задачу классификации таких суперпространств. В этом параграфе мы ограничимся перечислением таких суперпространств M, которые реализуются в виде флаговых многообразий для супергрупп классического типа. В пп. 2—6 описаны эти флаговые многообразия. Теорема 7 — список экзотических суперпространств Минковского флагового типа — является основным результатом параграфа.

2. П-симметричные и изотропные флаги. Нижеследующие определения параллельны § 3 гл. 4. Новые функторы флагов, которые мы определим, представимы соответствующими флаговыми суперпространствами в любой из трех стандартных категорий: суперсхем, дифференцируемых супермногообразий и аналитических супермногообразий. Иногда для краткости мы говорим о суперсхемах. Ниже мы дадим обзор основных свойств флаговых многообразий, часто опуская детали проверок.

Пусть M — суперпространство, $\mathscr{T}$ — локально свободный пучок конечного ранга па нем. Напомним, что флагом длины k в $\mathscr{T}$ называется последовательность локально прямых подпучков $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{T}_{k+1} = \mathscr{T}$. Тип флага — это последовательность рангов $\mathrm{rk}\,\mathscr{T}_i$. Пусть $\varphi\colon N \to M$ — некоторый морфизм; тогда φ^* переводит флаги данного типа в $\mathscr{T}$ во флаги того же типа в $\varphi^*(\mathscr{T}) = \mathscr{T}_N$.

Мы будем рассматривать также пучки $\mathscr{T}$, снабженные одной из следующих структур: а) П-симметрия, т. е. изоморфизм $p\colon \mathscr{T} \to \Pi\mathscr{T}$, $p^2 = \mathrm{id}$; иногда мы будем считать p нечетной инволюцией $\mathscr{T}$; б) невырожденная форма b одного из типов $\mathrm{O\,Sp}$, $\mathrm{Sp\,O}$, $\Pi\,\mathrm{Sp}$, $\Pi\mathrm{O}$. В этом случае перенесенные пучки $\mathscr{T}_N$ наследуют такую же структуру. Наличие структуры позволяет выделить подклассы П-симметричных и b-изотропных флагов в $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}_N$.

Паре $(M, \mathscr{T})$, структуре на $\mathscr{T}$ и типу флага ставятся в соответствие функторы флагов на категории суперпространств над M. Приведем их обозначения, которыми мы будем пользоваться:

F_M (*тип флага*, $\mathscr{T}$): $(N, \varphi) \mapsto$ {*флаги данного типа в* $\varphi^*(\mathscr{T})$},

$F\Pi_M$ (*тип флага*, $\mathscr{T}$): $(N, \varphi) \to$ {П- *симметричные флаги данного типа в* $\varphi^*(\mathscr{T})$},

FI_M (*тип флага*, $\mathscr{T}$; *тип формы*): $(N, \varphi) \mapsto$ {*изотропные флаги данного типа в* $\varphi^*(\mathscr{T})$}.

Функторы флагов длины единица — это грассманианы; мы чаще обозначаем их G, $G\Pi$, GI.

Все функторы флагов представимы пространствами относительно конечного типа над M; естественные вложения $F\Pi_M$, $FI_M \subset F_M$ представлены замкнутыми вложениями; естественные проекции «на подфлаги меньше типа» представлены морфизмами, которые сами являются флаговыми пространствами. Флаговые суперпространства над $\mathbf{C}$ являются гладкими; отсюда вытекает, что проекции $F_M \to M$ — гладкие морфизмы.

Пусть $F = F_M$ — одно из флаговых пространств для $(M, \mathscr{T})$, π: $F_M \to M$ — каноническая проекция. Тавтологический флаг в $\pi^*(\mathscr{T})$ мы, как обычно, обозначаем, указывая ранги его компонент: $\mathscr{S}_F^{d_1} \subset \mathscr{S}_F^{d_2} \subset \ldots \subset \pi^*(\mathscr{T}) = \mathscr{T}_F^d$. На F имеется также ортогональный флаг, компоненты которого отмечаются тильдой: $\widetilde{\mathscr{S}}_F^{d-d_k} \subset \ldots \subset \widetilde{\mathscr{S}}_F^{d-d_2} \subset \widetilde{\mathscr{S}}_F^{d-d_1} \subset \pi^*(\mathscr{T}^*)$ $\widetilde{\mathscr{S}}_F^{d-d_i} = (\mathscr{S}_F^{d_i})^{\perp}$.

Пусть π: $G \to M$ — один из грассманианов подпучков в $\mathscr{T}$, и пусть $\mathscr{S} \subset \pi^*(\mathscr{T})$ — тавтологический пучок на нем. Рассмотрим локальное вертикальное векторное поле X на G (т. е. сечение $\mathscr{T}G/M$) и определим естественное действие X на $\pi^*(\mathscr{T})$ (поднятые сечения горизонтальны). Формула Лейбница показывает, что отображение $\overline{X}$: $\mathscr{S} \to \pi^*(\mathscr{T})/\mathscr{S}$, $\overline{X}s = Xs \bmod \mathscr{S}$ линейно по s. Далее, отображение $X \mapsto \overline{X}$ линейно по X. Поэтому мы получаем морфизм $\mathcal{O}_G$-модулей $\mathscr{T}G/M \to \mathscr{H}om(\mathscr{S}, \pi^*(\mathscr{T})/\mathscr{S}) = \mathscr{S}^* \otimes \pi^*(\mathscr{T})/\mathscr{S} = \mathscr{S}^* \otimes \widetilde{\mathscr{S}}^*$. Для $G = G\Pi$ или GI образ этого морфизма не совпадает со всем $\mathscr{S}^* \otimes \widetilde{\mathscr{S}}^*$. В самом деле, реализуем $G\Pi(d; \mathscr{T})$ как замкнутое подпространство $G(d; \mathscr{T})$, инвариантное относительно инволюции, индуцированной p, которую мы тоже обозначим p. Эта инволюция действует также на касательном пучке, и $\mathscr{T}G\Pi/M$ есть инвариантная часть $\mathscr{T}G/M$, ограниченного на $G\Pi$. Нетрудно связать это действие с действием p на $\mathscr{S}$ и на $\widetilde{\mathscr{S}}$, но нам не понадобится точная формула. Далее, для изотропных грассманианов форма b_G на $\pi^*(\mathscr{T})$ позволяет построить отображение λ: $\widetilde{\mathscr{S}}^* \to \mathscr{S}^*$ (для четных b) или $\widetilde{\mathscr{S}}^* \to \Pi\mathscr{S}^*$ (для нечетных b). Ниже мы опишем образ $\mathscr{T}G/M$ в $\mathscr{S}^* \otimes \mathscr{S}^*$ или в $\Pi(\mathscr{S}^* \otimes \mathscr{S}^*) = \mathscr{S}^* \otimes \Pi\mathscr{S}^*$ относительно $\mathrm{id} \otimes \lambda$. Имеет место следующая теорема, которую можно вывести из приводимого ниже описания координат на больших клетках грассманианов.

3. Теорема. *Относительные касательные пучки на грассманианах различных типов описываются следующими изоморфизмами и точными последовательностями:*

$$\mathcal{T} G_M(d;\,\mathcal{T})/M = \mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*;$$

$$\mathcal{T} G\Pi_M(d;\,\mathcal{T})/M = \mathcal{H}om^p(\mathcal{S},\,\widetilde{\mathcal{S}}^*) = (\mathcal{S}^* \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^*)^p;$$

$$0 \to \mathcal{S}^* \otimes \left(\mathcal{S}^{\perp}_{\pi^*(b)}/\mathcal{S}\right) \to \mathcal{T} GI_M(d;\,\mathcal{T},\,b)/M \to \mathcal{R} \to 0,$$

где $\mathcal{R} = \Lambda^2(\mathcal{S}^*)$, $S^2(\mathcal{S}^*)$, $\Pi S^2(\mathcal{S}^*)$, $\Pi\Lambda^2(\mathcal{S}^*)$ для формы b типа $\mathrm{O\,Sp}$, $\mathrm{Sp\,O}$, $\Pi\,\mathrm{Sp}$, $\Pi\mathrm{O}$ соответственно. ■

4. П-симметричные грассманианы. Как в § 3 гл. 4, будем работать локально по M. Это значит, что мы заменяем M суперкоммутативным кольцом A, а пучок $\mathcal{T}$ — свободным A-модулем T. Выбрав базис T, будем считать, что $T = A^{d_0+c_0} \oplus (\Pi A)^{d_0+c_0}$. Если p: $T \to T$ — П-симметрия, то можно считать, что базис T имеет вид $\left(e_1, \ldots, e_{c_0+d_0};\ pe_1, \ldots, pe_{c_0+d_0}\right)$, где e_i — четные элементы.

В таком базисе подмодуль $S \subset T$ П-симметричен, если и только если вместе с любым элементом вида $x^ie_i + \xi^jpe_j$ он содержит элемент вида $-\xi^je_j + x^ipe_i$. Это означает, что грассманиан $G\Pi_M \subset G_M$, $M = \mathrm{Spec}\,A$, покрыт спектрами колец $A[x_I,\,\xi_I]$, где x_I, ξ_I заполняют свободные места в матрицах вида

$$Z_I^{\Pi} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & c_0 & d_0 & c_0 & d_0 \\ \hline d_0 & x_I & E_{d_0} & \xi_I & 0 \\ \hline d_0 & -\xi_I & 0 & x_I & E_{d_0} \\ \hline & & I_0 & & I_1 \end{array}$$

Есть более инвариантное рассуждение, показывающее, что $G\Pi_M$ замкнуто внутри G_M. Рассмотрим на G_M пучки $\mathcal{S}$, $p(\mathcal{S}) \subset \pi^*(\mathcal{T})$. N-точка φ: $N \to G_M$ лежит в ΠG_M, если и только если $\varphi^*(\mathcal{S}) = \varphi^*(p(\mathcal{S}))$, т. е. если подъем на N гомоморфизма пучков $\mathcal{S} \to \pi^*(\mathcal{T})/p(\mathcal{S})$ равен нулю. Так как $\pi^*(\mathcal{T})/p(\mathcal{S})$ локально свободен, это условие можно записать локальными уравнениями, которые и порождают пучок идеалов, определяющий ΠG_M.

Представимость функтора П-симметричных флагов устанавливается индукцией по длине флага, точно так же, как для обычных флагов. Оставив подробности читателю, укажем несколько дополнительных свойств П-симметрии.

а) пусть $p\colon S \to S$ — П-симметрия A-модуля, т. е. нечетный гомоморфизм с $p^2 = \mathrm{id}$, T — любой A-модуль. Тогда на $S \otimes T$, $T \otimes S$, $\mathrm{Hom}\,(S, T)$ и $\mathrm{Hom}\,(T, S)$ можно определить П-симметрии формулами $p(s \otimes t) = p(s) \otimes t$, $p\,(t \otimes s) = (-1)^{\tilde{t}}\, t \otimes p\,(s)$, $p\,(f)\,(s) = (-1)^{\tilde{f}+1} f(p(s))$, $p(f)(t) = p\,(f\,(t))$ соответственно. Если на T тоже задана П-симметрия, то аналогичную конструкцию можно проделать с помощью T. Произведение двух таких симметрий является уже четным автоморфизмом с квадратом $-\mathrm{id}$: $q(s \otimes t) = (-1)^s p(s) \otimes p(t)$, $q^2(s \otimes t) = -s \otimes t$.

б) Пусть T — A-модуль ранга $1|1$, $p\colon T \to T$ — некоторая П-симметрия, причем $p^2 = -\mathrm{id}$. Она определяет подмножество $Q \subset T_0$ таких t, что $T = At \oplus Ap(t)$. На Q действует мультипликативная группа A^* по формуле $(a_0 + a_1) \circ t = a_0 t + a_1 p(t)$. Нетрудно видеть, что Q образует главное однородное пространство над A^*. Это позволяет поставить в соответствие любой паре $(\mathcal{L}, p)$, где $\mathcal{L}$ — пучок ранга $1|1$ на суперсхеме M, с П-симметрией p, $p^2 = -\mathrm{id}$, класс когомологий во множестве $H^1(M, \mathcal{O}^*_M)$. Это множество представляет собой специфическую версию функтора Пикара для суперсхем.

5. Изотропные флаги. Мы изучим изотропные флаги подробнее в случае, когда форма b на пучке $\mathcal{T}$ расщепима. Определение расщепимых форм было дано в § 5 гл. 3.

Приведем их инвариантную характеризацию.

Предложение. *Пусть b — невырожденная форма на пучке $\mathcal{T}$ типа* OSp *или* $\Pi\,\mathrm{Sp}$. *Следующие условия равносильны:*

а) *b расщепима.*

б) *в окрестности каждой точки $\mathcal{T}$ имеет локально прямой изотропный подпучок максимального ранга $r|s$ (для* $\mathrm{OSp}(2r|2s)$ *или* $\mathrm{OSp}(2r+1|2s)$*), или одного из максимальных рангов $r|s$ (для* $\Pi\,\mathrm{Sp}(r+s|r+s)$*), или любого из максимальных рангов.*

Если эти условия выполнены, то любой прямой изотропный подпучок $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ локально вкладывается в прямой изотропный подпучок любого максимального ранга, большего ранга $\mathcal{S}$, а также допускает локальный базис сечений, являющийся частью стандартного локального базиса в $\mathcal{T}$ (для формы b).

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Если b расщепима, то изотропные прямые подпучки максимальных рангов порождаются частями стандартных базисов.

б) $\Rightarrow$ а) Эту импликацию и последнее утверждение докажем индукцией по рангу $\mathcal{T}$. Для наименьшего ранга $1|0$ утверждение тривиально; ранг $0|1$ невозможен. Пусть ранг $\mathcal{T} \geqslant 1|1$, и пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ — прямой изотропный подпучок ненулевого в окрестности $x \in M$ ранга. Работая локально, выберем подпучок $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ ранга $1|0$ или $0|1$. В силу невырожденности b существует локальный прямой подпучок $\mathcal{S}'_0 \subset \mathcal{T}$ (возможно, в меньшей окрестности), такой, что b индуцирует невырожденное спаривание между $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}'_0$. Классическое рассуждение (о «гиперболической плоскости») показывает, что сумма $\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}'_0$ прямая, ограничение b на нее невырождено и допускает стандартный базис. Далее, $\mathcal{T} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}'_0 \oplus (\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}'_0)^{\perp}_b$ (все локально). Положим $\mathcal{T}' = (\mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}'_0)^{\perp}_b$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}'$. Тогда $\mathcal{T}'$ — пучок меньшего ранга, чем $\mathcal{T}$, с невырожденной формой того же типа, а $\mathcal{S}' \subset \mathcal{T}'$ — изотропный прямой подпучок. Если $\mathcal{S}$ был максимального ранга, то и $\mathcal{S}'$ максимального ранга; по индуктивному предположению, b на $\mathcal{T}'$ расщепима и, значит, b на $\mathcal{T}$ расщепима. Если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ не максимального ранга, то по индуктивному предположению подходящий локальный базис $\mathcal{S}'$ дополняется до стандартного в $\mathcal{T}'$, и потому то же верно для $\mathcal{T}$. ■

6. Изотропные грассманианы. Прежде всего, легко установить, что морфизм функторов $GI_M \to G_M$ всегда представлен замкнутым вложением, если $b\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ (или $\Pi\mathcal{T}^*$) — прямая форма, без каких бы то ни было условий невырожденности или симметрии. Действительно, пучок $\mathcal{S}^{\perp}_b \subset \mathcal{T}$ является тогда локально прямым и, стало быть, $\pi^*\mathcal{T}/\mathcal{S}^{\perp}_b$ локально свободен. Поэтому подфунктор G_M, отвечающий тем морфизмам $N \xrightarrow{\varphi} M$, для которых $\varphi^*(\mathcal{S}) \to \varphi^*(\pi^*\mathcal{T}/\mathcal{S}^{\perp}_b)$ есть нулевой гомоморфизм, замкнут (то же рассуждение, что в п. 4). Но этот подфунктор и есть GI_M.

Цель последующих вычислений — показать, что если b невырождена и расщепима, то GI_M можно покрыть относительными аффинными пространствами, когда ранг изотропных подпучков максимален. Мы просто пишем уравнения на строки матрицы Z_I, которые означают изотропность, и показываем, что они явно разрешаются. Подразумеваемый локальный базис $\mathcal{T}$ предполагается стандартным, а выбор единичной подматрицы в Z_I сделан таким, что при нулевых значениях остальных элементов Z_I базис соответствующего изотропного подпучка (строки Z_I) является частью стандартного базиса $\mathcal{T}$. В силу предложения 5 аффинные пространства, которые мы таким образом получим, действительно покрывают Gl_M.

Пусть B — матрица Грама формы. Уравнения изотропности для $\mathrm{O\,Sp}$ имеют следующий вид (матрицы разбиты на блоки так, чтобы их удобно было умножать поблочно; $\mathrm{O\,Sp}(2r+1|2s)$ и $\mathrm{O\,Sp}(2r|2s)$ указаны вместе — часть, отделенная пунктиром, относится к $2r+1$; латинские блоки состоят из четных элементов, греческие из нечетных).

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & r & r & s & s \\ \hline r & Y & A & E_r & 0 & \Gamma \\ \hline s & \Xi & \Lambda & 0 & E_s & B \\ \hline \end{array}\;\left|\begin{array}{c|cc|cc} 1 & \multicolumn{4}{c}{0} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 0 & E_r \\ \hline E_r & 0 \end{array} & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{array}{c|c} 0 & E_s \\ \hline -E_s & 0 \end{array} & \end{array}\right|\;\left|\begin{array}{c|c} Y^t & \Xi^t \\ \hline A^t & \Lambda^t \\ \hline E_r & 0 \\ \hline 0 & E_s \\ \hline -\Gamma^t & B^t \end{array}\right| = 0.$$

Вычисляя, находим в случае $\mathrm{O\,Sp}(2r|2s)$ условия: $A+A^t=0$, $B-B^t=0$, $\Gamma=\Lambda^t$. Случай $\mathrm{O\,Sp}(2r+1|2s)$ немногим сложнее:

$$A+A^t+YY^t=0,\ \Lambda^t-\Gamma+Y\Xi^t=0,\ B^t-B+\Xi\Xi^t=0.$$

В качестве независимых координат здесь можно взять элементы Y, Ξ, Γ, элементы A строго ниже диагонали, элементы B ниже и на диагонали.

Для группы $\Pi\,\mathrm{Sp}(r+s|r+s)$ уравнения изотропности подпучка ранга $r|s$ имеют вид

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & s & r & s & r \\ \hline r & A & E_r & 0 & \Gamma \\ \hline s & -\Delta & 0 & -E_s & -B \\ \hline \end{array}\;\left|\begin{array}{c|c} 0 & E_{r+s} \\ \hline E_{r+s} & 0 \end{array}\right|\;\left|\begin{array}{c|c} A^t & \Delta^t \\ \hline E_r & 0 \\ \hline 0 & E_s \\ \hline -\Gamma^t & B^t \end{array}\right| = 0.$$

Замечание о знаках: имеется в виду, что нечетная часть базиса рассматриваемого изотропного подмодуля порождена строками матрицы $(\Delta|0|E_s|B)$; минус же перед ними отражает $(-1)^{\widetilde{b}\,\widetilde{t}}$ в правой части формулы. На окончательный вид уравнений он не влияет:

$$\Gamma - \Gamma^{t} = 0, \quad A + B^{t} = 0, \quad \Delta + \Delta^{t} = 0.$$

Следовательно, соответствующее открытое подмножество $Gl_M(r|s;\ \mathcal{T},\ b)$ представлено относительным аффинным пространством размерности $\left(rs\,\middle|\,\frac{r(r+1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2}\right)$.

Пусть Gl_M — один из построенных максимальных изотропных грассманианов, π — структурный морфизм, $\mathcal{S}$ — тавтологический пучок. Как для двух предыдущих случаев, мы можем построить морфизм $t\colon \mathcal{T}Gl_M|_M \to \mathcal{H}om\,(\mathcal{S}, \pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S})$. Теперь, пользуясь формой $\pi^*(b)$ на $\pi^*(\mathcal{T})$, мы можем отождествить $\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S}$ с $\mathcal{S}^*$ для $\mathrm{O\,Sp}\,(2r|2s)$, или с $\Pi\mathcal{S}^*$ для $\Pi\,\mathrm{Sp}$. В случае $\mathrm{O\,Sp}\,(2r+1|s)$ имеется сюръекция β: $\pi^*(\mathcal{T})/\mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$ с локально прямым ядром ранга $1|0$. Поэтому имеем три возможных типа морфизмов: $t\colon \mathcal{T}Gl_M/M \to \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*$, $(1 \otimes \beta) \circ t\colon \mathcal{T}Gl_M/M \to \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*$ (тип $\mathrm{O\,Sp}$) или $t\colon \mathcal{T}Gl_M/M \to \mathcal{S}^* \otimes \Pi\mathcal{S}^* = \Pi(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*)$ (представить $\Pi\mathcal{S}^*$ в виде $\Pi O \otimes \mathcal{S}^*$ и сделать ΠO внешним множителем). Прямые вычисления показывают, что образы суть $\Lambda^2(\mathcal{S}^*)$ и $\Pi S^2(\mathcal{S}^*)$ соответственно. В координатах видно, что получаются изоморфизмы $\mathcal{T}Gl_M = \Lambda^2(\mathcal{S}^*)$, $(1 \otimes \beta)^{-1}\ \Lambda^2(\mathcal{S}^*)$ или $\Pi S^2(\mathcal{S}^*)$ соответственно.

Изотропные грассманианы немаксимального типа допускают удобное покрытие, которое строится сначала переходом к флагам длины два, у которых подмодуль максимален, и затем применением морфизма, который забывает больший подмодуль. Суперсхемы изотропных флагов строятся такой же индукцией, как в предыдущих случаях.

Дадим теперь список флаговых пространств, подложка которых является моделью Пенроуза. Разумеется, список начинается тем классом, который мы только и рассматривали до сих пор. Подразумевается, что база флагового пространства — точка.

7. **Теорема.** *Все флаговые пространства M с $M_{\mathrm{rd}} = G(2;\ \mathbf{C}^4)$ содержится в следующем списке (указаны размерности T и M):*

а) $F(2|0,\ 2|N;\ T^{4|N})$, $4|4N$.

б) $F(2|0,\ 4|0;\ T^{4|N})$ *и* $F(0|N,\ 2|N;\ T^{N|4})$, $4|4N$.

в) $G(2|0;\ T^{4|N})$ *и* $G(2|N;\ T^{4|N})$, $4|2N$.

Кроме того, имеются случаи Па) — Пв), *получающиеся из* а) — в) *заменой* T *на* $T' = \Pi T$, например Па): $F(0|2,\ N|2;\ T^{N|4})$.

г) $G\Pi(2|2;\ T^{4|4})$, $4|4$.

д) $GI(1|0;\ T^{6|2N},\ \mathrm{O\,Sp})$ и $GI(0|1;\ T^{2N|6},\ \mathrm{Sp\,O})$, $4|2N$.

е) $GI(2|2;\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp})$ *и* $GI(2|2;\ T^{4|4},\ \Pi\mathrm{O})$, $4|4$.

ж) $GI(2|0;\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp})$, $4|7$ *и* $GI(0|2;\ T^{4|4},\ \Pi\mathrm{O})$, $4|5$.

з) $FI(2|0,\ 2|2;\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp})$ *и* $FI(0|2,\ 2|2;\ T^{4|4},\ \Pi\mathrm{O})$, $4|8$.

и) $FI(2|0,\ 4|0;\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp})$, $4|10$; $FI(0|2,\ 0|4;\ T^{4|4},\ \Pi\mathrm{O})$, $4|6$.

Доказательство. Принцип перечисления всех нужных нам суперпространств следующий. Пусть F — флаговое многообразие, $F_{\mathrm{rd}} = G(2|0;\ T^{4|0})$. Пусть $F \to G$ — проекция F на грассманиан старших подпространств во флаге. Тогда либо $G_{\mathrm{rd}} = G(2|0;\ T^{4|0})$, либо G_{rd} — точка. Многообразия G_{rd} вычисляются с помощью информации, полученной ранее; выбор любой из двух возможностей для старших подпространств резко сокращает оставшийся перебор. Ниже пункты а) — г) посвящены одному из типов флаговых пространств.

а) Прежде всего, $G\left(d_0\,|\,d_1;\ T^{d_0+c_0|d_1+c_1}\right)_{\mathrm{rd}} = G\left(d_0\,|\,0;\ T^{d_0+c_0|0}\right)G\left(0\,|\,d_1;\ T^{0|d_1+c_1}\right)$. Поэтому G_{rd} — точка, если и только если либо $c_0 = d_1 = 0$, либо $c_1 = d_0 = 0$ (кроме тривиальных случаев $c_0 = c_1 = 0$ или $d_0 = d_1 = 0$). Значит, одноточечные грассманианы старших пространств имеют вид либо $G(d|0;\ T^{d|c})$, либо $G(0|d;\ T^{c|d})$; последние получаются из первых заменой T на ΠT. Пусть $F \to G(d|0;\ T^{d|c})$ — проекция на старший флаг и $F_{\mathrm{rd}} = G(2|0;\ T^{4|0})$; тогда F имеет проекцию на $F(d_1|0,\ d|0;\ T^{d|c})$ для некоторого $d_1 < d$; это возможно лишь при $d_1 = 2$, $d = 4$, c — любое. В остальных случаях старший грассманиан для F может иметь только один из следующих видов: $G(2|N;\ T^{4|N})$, $G(2|0;\ T^{4|N})$ и П-симметричные этим случаи. Не изменив G_{rd}, можно удлинить флаги первого типа, добавив подпространство размерности либо $2|0$, либо $0|N$. Это исчерпывает возможности а) — в) и Па) — Пв) в теореме 7.

б) Обращаясь к П-симметричным флагам, заметим прежде всего, что если на T есть П-симметрия p, то $\mathrm{rk}\,T = r|r$, и что все пары $(T,\ p)$ одного ранга (над $\mathbf{C}$) изоморфны. Далее, $G\Pi(d|d;\ T^{c+d|c+d})_{\mathrm{rd}} = G(d|0;\ T^{c+d|0})$. Поэтому, если $F\Pi_{\mathrm{rd}} = G(2|0;\ T^{4|0})$, то $F\Pi = G\Pi(2|2;\ T^{4|4})$.

в) Для $\mathrm{O\,Sp}$ — изотропных флагов имеем $GI(r|s;\ T^{m|n},\ \mathrm{O\,Sp})_{\mathrm{rd}} = GI(r|0;\ T^{m|0},\ \mathrm{O}) \times GI(s|0;\ T^{n|0},\ \mathrm{Sp})$. Значит, грассманиан старших пространств не может иметь четную размерность нуль. Так как $G(2|0;\ T^{4|0})$ неразложим, для него возможны лишь случаи $s=0$ или $r=0$. В первом случае уравнение для четной размерности $r(m-2r)+\frac{r(r-1)}{2}=4$ имеет единственное решение $r=1$, $m=6$. Во втором случае уравнение $s(2n-s)+\frac{s(s+1)}{2}=4$ тоже имеет единственное решение $s=1$, $n=5$, но $\mathrm{O\,Sp}$-форма на пространстве $T^{m|5}$ вырождена.

То, что $GI(1\,|\,0;\ T^{6|2N},\ \mathrm{O\,Sp})_{\mathrm{rd}} \simeq G\ (2;\ \mathbf{C}^4)$, вытекает из плюккеровской реализации этого грассманиана в виде кадрики разложимых бивекторов в $P(\Lambda^2\mathbf{C}^4)$.

г) Наконец, рассмотрим $\Pi\,\mathrm{Sp}$- и $\Pi\mathrm{O}$-изотропные флаги. Если на T есть невырожденная форма такого типа, то $\mathrm{rk}\,T=m|m$; при этом четное и нечетное подпространства в T двойственны. Поэтому $GI(r|s;\ T^{m|m},\ \Pi\,\mathrm{Sp}$ или $\Pi\mathrm{O})_{\mathrm{rd}}$ изоморфно относительному грассманиану $G_H(s|0,\ \widetilde{\mathcal{T}}^{m-r|0})$ над грассманианом $H=G(r|0;\ T^{m|0})$. Четная размерность нуль получается для $GI(m|0;\ T^{m|m})$ или $GI(0|m;\ T^{m|m})$; достраивание флагов приводит к случаям и) теоремы 7. Остальные случаи отвечают возможности, когда грассманиан старших подпространств после редукции изоморфен $G(2|0;\ T^{4|0})$. ■

8. Диаграммы Пенроуза для экзотических моделей. Имея список флаговых суперпространств Минковского, естественно поставить вопрос о том, какие из них дополняются до диаграммы $L \xleftarrow{\pi_1} F \xrightarrow{\pi_2} M$ с тем свойством, что после редукции нечетных координат эта диаграмма становится изоморфной $F(1,\ 3;\ T^{4|0}) \xleftarrow{\pi_1} F(1,\ 2,\ 3;\ T^{4|0}) \xrightarrow{\pi_2} M_{\mathrm{rd}}$, а также каковы свойства преобразований Пенроуза, связанных с этими диаграммами. В частности, важно знать, когда нетривиальны условия интегрируемости вдоль слоев π_1, т. е. когда их размерность имеет вид $1|a$, $a>0$. Существенно также «количество нильпотентов» на L, поскольку от него зависят ограничения на поле Янга — Миллса, которые можно получить из ЯМ-пучков на L.

Не исследуя эти вопросы исчерпывающе, ограничимся некоторой предварительной информацией. Вот часть диаграмм для пространств из нашего списка:

$$A_N\colon\ L^{5|2N}=F(1\,|\,0,\ 3\,|\,N;\ T^{4|N}) \xleftarrow{\pi_1} F^{6|4N}=$$
$$=F(1\,|\,0,\ 2\,|\,0,\ 2\,|\,N,\ 3\,|\,N;\ T) \xleftarrow{\pi_2} M^{4|4N}=F(2\,|\,0,\ 2\,|\,N;\ T),$$

$$P\colon\ L^{5|5} = GI\,(1\,|\,1;\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp}) \xleftarrow{\pi_1} F^{6|6} =$$

$$= FI\,(1\,|\,1,\ 2\,|\,2;\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\pi_2} M^{4|4} = GI\,(2\,|\,2,\ T^{4|4},\ \Pi\,\mathrm{Sp}),$$

$$Q\colon\ L^{5|5} = F\Pi\,(1\,|\,1,\ 3\,|\,3;\ T^{4|4}) \xleftarrow{\pi_1} F^{6|6} =$$

$$= F\Pi\,(1\,|\,1,\ 2\,|\,2,\ 3\,|\,3;\ T^{4|4}) \xrightarrow{\pi_2} M^{4|4} = G\Pi\,(2\,|\,2;\ T^{4|4}),$$

$$R\colon L^{5|4N} = GI\,(2\,|\,0;\ T^{6|2N},\ \mathrm{O\,Sp}) \xleftarrow{\pi_1} F^{6|4N} =$$

$$= FI\,(1\,|\,0,\ 2\,|\,0;\ T^{6|2N},\ \mathrm{O\,Sp}) \xrightarrow{\pi_2} M^{4|2N} = GL(1|0; T,\ \mathrm{O\,Sp}).$$

Диаграмму A_N мы рассматривали в предыдущих параграфах. Диаграмма R не удовлетворяет условию, чтобы суперсветовые геодезические имели ненулевую нечетную размерность. Здесь, напротив, нечетные координаты появляются на «небесных сферах» $L(x)$.

Относительно количества нильпотентов на L докажем следующее. Пусть $L_0^{(n)}$ есть n-я инфинитезимальная окрестность L в чисто четном случае.

9. Предложение. *Для диаграмм A_N, P, Q существуют сюръективные отображения $L \to L_0^{(N)}$, $L \to L_0^{(2)}$, $L \to L_0^{(2)}$ соответственно.*

Доказательство. а) Случай A_N. Пусть z_i, ξ_j ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, \ldots, N$) — базис $(T^{4|N})^*$, z^i, ξ^j — двойственный базис $T^{4|N}$. Эти элементы можно интерпретировать как сечения пучков $(\mathcal{S}^{1|0})^*$ на $P(T^{4|N})$ и $P(T^{4|N*})$ соответственно. Подпространство $L(A_N) \subset P(T) \times P(T^*)$ задается уравнением инцидентности $\sum x_i \otimes x^i + \sum \xi_j \otimes \xi^j = 0$ (слева стоит сечение обратимого пучка $\mathcal{O}(1, 1)$ на $P \times \widehat{P}$). С другой стороны, подпространство $L_0^{(N)}$ можно задать уравнениями $\xi_j = \xi^j = 0$, $\left(\sum_{j=4}^{4} z_i \otimes z^i\right)^{N+1} = 0$. Так как $\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_j \otimes \xi^j\right)^{N+1} = 0$, отсюда следует, что отождествление подложек $L(A_N)_{\mathrm{rd}} = L_0$ можно продолжить до морфизма $L\,(A_N) \to L_0^{(N)}$. Нетрудно убедиться, что он сюръективен, например, переходя к стандартному аффинному покрытию и пользуясь тем, что $\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \otimes \xi^j\right)^{N} \neq 0$.

б) Случай P. Выберем в $T^{4|4}$ базис, в котором форма $\Pi\,\mathrm{Sp}$-типа имеет стандартную матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Полный грассманиан $G = G(1|1;\ T^{4|4})$ можно задать «однородными координатами», записанными в виде матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Он покрыт аффинными супермногообразиями G_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, которые определяются так. Пусть $Z_{ij} = \begin{pmatrix} x_i & \xi_j \\ \eta_i & y_j \end{pmatrix}$. Тогда G_{ij} — спектр кольца, порожденного «неоднородными координатами» — элементами матрицы $Z_{ij}^{-1}Z$. На G_{ij} пучок $\mathcal{S}_G^{1|1}$ задан в этих координатах вместе со своей тривиализацией: первая строка $Z_{ij}^{-1}Z$ есть его четное сечение, вторая — нечетное; эти сечения записаны в координатах, связанных с выбранным базисом T. Функции перехода как для G, так и для $\mathcal{S}^{1|1}$ очевидны из этого описания. Подпространство $L(P) \subset G$ выделяется однородными уравнениями, которые означают изотропность $\mathcal{S}^{1|1}$: $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i + \sum_{i=1}^{4} \xi_i \eta_i = 0$, $\sum_{i=1}^{4} y_i \eta_i = 0$. Отличие от случая A_3 состоит в том, что из-за правил склейки и второго (нечетного) уравнения теперь $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right)^3 = 0$, и лишь $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right)^2 \neq 0$. В самом деле, рассмотрим для примера открытое множество G_{11}, спектр кольца, порожденного элементами матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 \\ 0 & \mathrm{H}_2 & \mathrm{H}_3 & \mathrm{H}_4 & 1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}.$$

На нем $L(P)$ выделяется уравнениями

$$1 + \sum_{i=2}^{4} X_i Y_i + \sum_{i=2}^{4} \Xi_i \mathrm{H}_i = 0, \quad \sum_{i=2}^{4} Y_i \mathrm{H}_i = 0.$$

Из первого уравнения следует, что в любой точке одна из координат Y_i обратима, второе показывает, что соответствующая H_i линейно выражается через две остальные; поэтому $H_2 H_3 H_4 = 0$ и $\left(\sum_{i=2}^{4} \Xi_i H_i\right)^3 = 0$.

в) Случай Q. Здесь мы рассмотрим замкнутое вложение $L(Q) \subset G\Pi(1|1,\ T) \times G\Pi(1|1,\ T^*)$ в виде «квадрики инцидентности». Базис в $T^{4|4}$ выбран в виде $(e_i,\ pe_i)$, где p есть П-симметрия. Грассманиан $G\Pi(1|1;\ T)$ покрыт открытыми множествами G_{ii} с координатами

$$\begin{pmatrix} x_i & \xi_i \\ -\xi_i & x_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_4 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные координаты на втором грассманиане обозначим верхними индексами. Уравнения инцидентности имеют вид $\sum_{i=1}^{4} x_i x^i + \sum_{j=1}^{4} \xi_j \xi^j = 0,\ -\sum_{i=1}^{4} x_i \xi^i + \sum_{j=1}^{4} x^j \xi_j = 0.$ Переходя к неоднородным координатам, убеждаемся, что $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i x^i\right)^3 = 0,\ \left(\sum_{i=0}^{4} x_i x^i\right)^2 \neq 0$, как в предыдущем случае. Это завершает доказательство.

§ 7. Геометрия простой супергравитации

1. Основные структуры. Мы будем называть комплексным суперпространством простой супергравитации ($N = 1$) комплексное супермногообразие размерности $4|4$, на котором заданы структуры из следующего списка.

а) Два интегрируемых комплексных распределения $\mathcal{T}_l M$, $\mathcal{T}_r M \subset \mathcal{T} M$ ранга $0|2$, сумма которых в $\mathcal{T} M$ прямая. Они должны удовлетворять следующему условию. Пусть $\mathcal{T}_0 M = \mathcal{T} M / (\mathcal{T}_l M \oplus \mathcal{T}_r M)$. Тогда форма Фробениуса

$$\varphi\colon \mathcal{T}_l M \otimes \mathcal{T}_r M \to \mathcal{T}_0 M,$$

$$\varphi(X \otimes Y) = [X,\ Y] \bmod (\mathcal{T}_l M \oplus \mathcal{T}_r M)$$

является изоморфизмом.

Согласно общей теореме Фробениуса $\mathcal{T}_l M$ и $\mathcal{T}_r M$ интегрируемы до расслоений: топологических препятствий к этому нет, ибо листы соответствующих слоений имеют размерность $0|2$. Точнее, положим $\mathcal{O}_{M_l}$ (соответственно $\mathcal{O}_{M_r}$) — подпучок в $\mathcal{O}_M$, аннулируемый всеми векторными полями из $\mathcal{T}_r M$ (соответственно $\mathcal{T}_l M$). Тогда $M_l = (M,\ \mathcal{O}_{M_l})$, $M_r = (M,\ \mathcal{O}_{M_r})$ суть супермногообразия размерности $4|2$; вложения $\mathcal{O}_{M_{l,r}} \subset \mathcal{O}_M$ определяют канонические проекции $\pi_{l,r}$: $M \to M_{l,r}$, тождественные на подложке; наконец, $\mathcal{T}_l M = \mathcal{T} M / M_r$, $\mathcal{T}_r M = \mathcal{T} M / M_l$.

б) Вещественная структура ρ на M типа (1, 1, 1), имеющая на M_{rd} четырехмерное вещественное многообразие неподвижных точек и меняющая местами $\mathcal{T}_l M$ с $\mathcal{T}_r M$.

Данные а) образуют суперконформную структуру на M. Заметим, что суперконформная структура отнюдь не задается конформным классом суперметрик. Последний тип данных нарушает эту конформную структуру примерно так же, как это делает выбор конкретной метрики в конформном классе.

в) Две четные невырожденные формы объема $v_{l,r} \in H^0(M_{l,r}, \mathrm{Ber}\, M_{l,r})$ с условием $v_l^\rho = v_r$.

Опишем теперь некоторые производные структуры. Важнейшей из них является лагранжиан: отмеченная форма объема на M. Его конструкция основана на следующем факте.

2. Предложение. *Имеется канонический изоморфизм пучков:*

$$(\mathrm{Ber}\, M)^3 = \pi_l^* \,\mathrm{Ber}\, M_l \otimes \pi_r^* \,\mathrm{Ber}\, M_r.$$

Доказательство. Положим $\Omega^1_{l,r} M = \Pi\, (\mathcal{T}_{l,r} M)^*$, $\Omega^1_0 M = \Pi\, (\mathcal{T}_0 M)^* \subset \Omega^1 M$. Согласно определениям имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega^1_0 M \to \Omega^1 M \to \Omega^1_l M \oplus \Omega^1_r M \to 0.$$

С другой стороны, дуализируя форму Фробениуса, получаем отождествление $\Omega^1_0 M = \Pi\left(\Omega^1_l M \otimes \Omega^1_r M\right)$, откуда

$$\left(\mathrm{Ber}\, \Omega^1_0 M\right)^* = \mathrm{Ber}\left(\Omega^1_l M \otimes \Omega^1_r M\right) = \\ = \left(\mathrm{Ber}\, \Omega^1_l M\right)^2 \otimes \left(\mathrm{Ber}\, \Omega^1_r M\right)^2. \quad (1)$$

Объединяя эти данные, получим, как в п. 1.8,

$$\mathrm{Ber}\, M = (\mathrm{Ber}\, \Omega^1 M)^* = \\ = \left(\mathrm{Ber}\, \Omega^1_0 M\right)^* \otimes \left(\mathrm{Ber}\, \Omega^1_l M\right)^* \otimes \left(\mathrm{Ber}\, \Omega^1_r M\right)^* = \mathrm{Ber} \Omega^1_l M \otimes \mathrm{Ber} \Omega^1_r M.$$

Рассмотрим теперь подпучок $\pi_l^* \Omega^1 M_l \subset \Omega^1 M$. В п. 11 мы проверим, пользуясь локальными координатами, что при отображении $\Omega^1 M \to \Omega^1_l M$ этот подпучок проектируется на весь $\Omega^1_l M$, а ядро проекции совпадает с $\Omega^1_0 M$, и аналогично для правых 1-форм. Таким образом, имеются две точные последовательности

$$0 \to \Omega^1_0 M \to \pi^*_{l,r} (\Omega^1 M_{l,r}) \to \Omega^1_{l,r} M \to 0,$$

из которых, как выше, получаем

$$\begin{aligned} \pi_l^* \operatorname{Ber} M_l &= \operatorname{Ber}\left(\pi_l^* \Omega^1 M_l\right)^* = \operatorname{Ber} \Omega_l^1 M \otimes \left(\operatorname{Ber} \Omega_r^1 M\right)^2, \\ \pi_r^* \operatorname{Ber} M_r &= \operatorname{Ber}\left(\pi_r^* \Omega^1 M_r\right)^* = \left(\operatorname{Ber} \Omega_l^1 M\right)^2 \otimes \operatorname{Ber} \Omega_r^1 M. \end{aligned} \tag{2}$$

Сравнение (1) и (2) завершает доказательство. ■

3. Лагранжиан. Лагранжианом пространства простой супергравитации M называется вещественная форма объема на нем

$$w = \left(\pi_l^* v_l \otimes \pi_r^* v_r\right)^{1/3}.$$

Разумеется, в этой формуле подразумевается отождествление пучков, описанное в предложении 2.

Теперь перед нами стоят две задачи.

Следует выяснить связь простой супергравитации с обычной. Этот «компонентный анализ» включает, в частности, выяснение структур, индуцированных на M_{rd}, и простейшие из них мы выявим в пп. 4—6.

Далее, следует научиться описывать геометрические структуры, введенные выше, с помощью суперполей. Это необходимо хотя бы для того, чтобы научиться писать по лагранжиану вариационные уравнения — до сих пор нам нечего варьировать. Есть много способов вводить суперполевые описания и снимать излишние степени свободы связями; мы выбираем самый естественный в нашем контексте формализм Огиевецкого и Сокачева, которому будет посвящен остаток этого параграфа, начиная с п. 7.

4. Спинорная структура на M_{rd}. Напомним, что спинорной структурой на M_{rd} называется изоморфизм $\mathcal{S} \otimes \widetilde{\mathcal{S}} \xrightarrow{\sim} \Omega^1 M_{\mathrm{rd}}$, $\operatorname{rk} \mathcal{S} = \operatorname{rk} \widetilde{\mathcal{S}} = 2$. На M_{rd} каноническая спинорная структура определяется следующими данными: $\mathcal{S} = \Pi\left(\Omega_l^1 M\right)_{\mathrm{rd}}$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \Pi\left(\Omega_r^1 M\right)_{\mathrm{rd}}$. Изоморфизм строится так. Прежде всего, дуализация формы Фробениуса дает изоморфизм $\Pi\Omega_l^1 M \otimes \Pi\Omega_r^1 M \xrightarrow{\sim} \Pi\Omega_0^1 M$. Далее, композиция вложения $\Omega_0^1 M \subset \Omega^1 M$ и редукции нечетных координат доставляет отображение $\Pi\left(\Omega_0^1 M\right)_{\mathrm{rd}} \to \Pi\Omega^1 M_{\mathrm{rd}}$. В п. 12 ниже мы проверим, что это изоморфизм. (Лишнее Π появилось из-за того, что в чисто четной геометрии мы пользовались по традиции Ω_{ev}^1, а в супергеометрии — Ω_{odd}^1).

В частности, на M_{rd} имеется голоморфная конформная метрика, что оправдывает название «суперконформная структура» в применении к данным а) п. 1. Из форм объема v_l, v_r можно построить две спинорные метрики на $M_{\rm rd}$.

5. Спинорные метрики. Положим

$$\varepsilon_l = (\pi_l^* v_l)^{1/3} \otimes (\pi_r^* v_r)^{-2/3}, \qquad \varepsilon_r = (\pi_l^* v_l)^{-2/3} \otimes (\pi_r^* v_r)^{1/3}.$$

Из отождествлений (2) в доказательстве предложения 2 получаем

$$\varepsilon_{l,r} \in (\operatorname{Ber} \Omega^1_{l,r} M)^{-1} = \operatorname{Ber} \Pi\Omega^1_{l,r} M.$$

Поэтому после редукции нечетных координат $\varepsilon_{l,\,r}$ превратятся в спинорные метрики ε, $\tilde{\varepsilon}$ — сечения $\Lambda^2\mathcal{S}$ и $\Lambda^2\tilde{\mathcal{S}}$ — на $M_{\rm rd}$, а $g = \varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon}$ станет голоморфной метрикой на $M_{\rm rd}$.

6. Вещественная структура на $M_{\rm rd}$. Она индуцирована ρ и, очевидно, совместима со спинорной структурой и спинорными метриками в смысле § 1 гл. 2. На вещественных точках $M_{\rm rd}$ метрика $\varepsilon \otimes \tilde{\varepsilon}$ имеет сигнатуру Лоренца.

Итак, мы описали все структуры на $M_{\rm rd}$, превращающие это многообразие в комплексное пространство-время, за исключением спинорных связностей. Их также можно построить, индуцировав канонической суперсвязностью на M; эту конструкцию мы опустим.

7. Приспособленные системы координат. Пусть $(x_l^a,\ \theta_l^\alpha)$ — локальная система координат в M_l. Предположим, что выполнены следующие условия:

а) Функции $(x_l^a)_{\rm rd}$ на $M_{\rm rd}$ вещественны (т. е. ρ-инвариантны).

б) Функции $\left(x^a = \frac{1}{2}(x_l^a + x_r^a),\ \theta_l^\alpha,\ \theta_r^{\dot\alpha}\right)$, где $x_r^a = (x_l^a)^\rho$, $\theta_r^{\dot\alpha} = (\theta_l^\alpha)^\rho$, образуют локальную систему координат в M.

Такие системы координат $(x_l,\ \theta_l)$ на M_l, $(x_r,\ \theta_r)$ на M_r и $(x,\ \theta_l,\ \theta_r)$ на M мы будем называть приспособленными. Их существование следует прямо из описания основных структур: x_l^a существуют, потому что множество вещественных точек на $M_{\rm rd}$ четырехмерно; в качестве θ_l^α можно взять две нечетные функции, локально спрямляющие $\mathcal{T}_l M$; условие б) в существенном следует из того, что сумма $\mathcal{T}_l M$ и $\mathcal{T}_r M$ прямая.

Далее мы проведем ряд вычислений в приспособленных координатах.

8. Описание суперпространства суперполями. Положим

$$H^a = \frac{1}{2i}(x_l^a - x_r^a).$$

Это — четыре функции на M; они вещественны, т. е. $(H^a)^\rho = H^a$, и нильпотентны, так как $(x_r^a)_{\mathrm{rd}}=(x_l^a)_{\mathrm{rd}}$. Набор функций (H^a) называется предпотенциалом Огиевецкого — Сокачева. Смена приспособленной системы координат меняет предпотенциал (H^a); такие преобразования называются калибровочными. Следуя Зигелю и Гэйтсу, было бы последовательнее допускать на M_l любые системы координат (y_l, η_l) (или накладывать на них только условие вещественности $y_{l,\,rd}$) и определять восьмикомпонентный предпотенциал $H^a = \frac{1}{2i}\left(y_l^a - (y_l^a)^\rho\right)$, $H^\alpha = \frac{1}{2i}\left(\eta_l^\alpha - (\eta_l^\alpha)^\rho\right)$. Выбор Огиевецкого — Сокачева уже подразумевает частичное закрепление калибровки.

Положим далее

$$v_l = \Phi_l^3 D^*\left(d\theta_l^\alpha, dx_l^a\right), \quad v_r = \Phi_r^3 D^*\left(d\theta_r^{\dot\alpha}, dx_r^a\right).$$

Кубы стоят для уменьшения количества дробных степеней в будущей формуле для лагранжиана.

Предпотенциал (H^a) определяет структуры а) и б) п. 1 на общем $4|4$-многообразии$\left(X^a, \theta^\alpha, \theta^{\dot\alpha}\right)$: достаточно положить

$$(X^a)^\rho = X^a + 2iH^a, \quad (\theta^{\dot\alpha})^\rho = \theta^\alpha;$$

$\mathcal{O}_l$ — функции от X^a, Θ^α; $\mathcal{O}_r$ — функции от $(X^a)^\rho$, $\theta^{\dot\alpha}$.

Две четные суперфункции $\Phi_{l,\,r}$ дополняют это описание. Ниже мы вычислим все введенные структуры, включая лагранжиан, через H и Φ; по ним можно проводить вариацию для вывода динамических уравнений. Функции $\Phi_{l,\,r}$ тоже зависят от координат; часто выбирают калибровку, в которой $\Phi_l = \Phi_r = 1$.

Положим $\partial_a = \partial/\partial x^a$, $\partial_\alpha = \partial/\partial\theta_l^{\dot\alpha}$, $\partial_{\dot\alpha} = \partial/\partial\theta_r^{\dot\alpha}$ — векторные поля на M, записанные в «центральной» системе координат. Введем следующие обозначения: $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_b^a = \left(\partial_l H^a\right)$ (матрица), и далее

$$X_\alpha^a = i\left[\left(1 - i\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}\right]_b^a \partial_\alpha H^b;$$

$$X_{\dot\alpha}^a = -i\left[\left(1 + i\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}\right]_b^a \partial_{\dot\alpha} H^b.$$

Это — нечетные, и стало быть, нильпотентные функции на M.

9. Лемма. *Дифференцирования*

$$\Delta_\alpha = \partial_\alpha + X^a_\alpha\partial_a, \quad \Delta_{\dot\alpha} = -\partial_{\dot\alpha} - X^a_{\dot\alpha}\partial_a \qquad (3)$$

образуют локальный базис $\mathcal{T}_l M$ и $\mathcal{T}_r M$ соответственно.

Доказательство. Чтобы принадлежать $\mathcal{T}_l M$ (соответственно $\mathcal{T}_r M$), Δ_α (соответственно $\Delta_{\dot\alpha}$) должны аннулировать $\theta^{\dot\alpha}$ и $x^a_r = x^a - iH^a$ (соответственно θ^α и $x^a_l = x^a + iH^a$). Коэффициенты X^a_α $\left(\text{соответственно } X^a_{\dot\alpha}\right)$ и находятся из этих условий:

$$(\partial_\alpha + X^a_\alpha\partial_a)(x^b - iH^b) = 0 \Leftrightarrow (\delta^b_a - i\partial_a H^b)\, X^a_\alpha = i\partial_\alpha H^b,$$

и аналогично для $\Delta_{\dot\alpha}$. Далее, пусть $D = A^a\partial_a + B^\alpha\partial_\alpha + C^{\dot\alpha}\partial_{\dot\alpha}$ лежит в $\mathcal{T}_l M$. Тогда, вычтя из D комбинацию $B^\alpha\Delta_\alpha$, можно считать, что $B^\alpha = 0$. Применив D к $\theta^{\dot\alpha}$, получим $C^{\dot\alpha} = 0$, а применив к x^b_r, получим $A^a(\delta^a_b - i\partial_a H^b) = 0$, откуда $A^a = 0$ в силу обратимости матрицы $1 - \frac{\partial H}{\partial x}$. ■

10. Следствие. *Формы*

$$\omega^a = dx^a - X^a_\alpha d\theta^\alpha - X^a_{\dot\alpha} d\theta^{\dot\alpha}$$

образуют базис пучка $\Omega^1_0 M$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\Delta_\alpha \lrcorner\, \omega^a = 0 = \Delta_{\dot\alpha} \lrcorner\, \omega^a$. ■

11. Следствие. *Имеют место точные последовательности*

$$0 \to \Omega^1_0 M \to \pi^*_{l,r}\Omega^1 M_{l,r} \to \Omega^1_{l,r} M \to 0,$$

использованные в доказательстве предложения 2. Формы (dx^b_l) и (dx^b_r) образуют базисы $\Omega^1_0 M$ в $\pi^*_{l,r}\Omega^1 M_{l,r}$ и выражаются через ω^a формулами

$$dx^a_l = (\delta^a_b + i\partial_b H^a)\,\omega^b, \quad dx^a_r = (\delta^a_b - i\partial_b H^a)\,\omega^b.$$

Доказательство. Подпучок $\pi^*_l\Omega^1 M_l \subset \Omega^1 M$ свободно порожден дифференциалами dx^a_l, $d\theta^\alpha_l$. Поскольку $\Delta_\alpha \lrcorner\, d\theta^\beta = \delta^\beta_\alpha$, отображение $\pi^*_l\Omega^1 M_l \to \Omega^1 M_l$ сюръективно. Его ядро, очевидно, свободно порождено dx^a_l. Из формул для ω^a нетрудно усмотреть, что разность $dx^a_l - (\delta^a_b + i\partial_b H^a)\,\omega^b$, выраженная в центральном базисе $(dx^a, d\theta^\alpha_l, d\theta^{\dot\alpha}_r)$, является линейной комбинацией $d\theta^\alpha$ и $d\theta^{\dot\alpha}$. С другой стороны, она лежит в $\Omega^1_0 M$ и поэтому равна нулю. Аналогично проверяется формула для правого базиса. ■

12. Следствие. *Ограничение* $(\Omega^1_0 M)_{\mathrm{rd}} \to \Omega^1(M_{\mathrm{rd}})$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Форма ω^a при этом ограничении переходит в dx^a_{rd}, поскольку X^a_α и $X^a_{\dot\alpha}$ нильпотентны. ■

Мы использовали это обстоятельство в п. 4 для конструкции спинорной структуры на M_{rd}.

13. Вычисление формы Фробениуса. Обозначим через $(\mathscr{D}_a)$ базис $\mathscr{T}_0 M$, двойственный к базису (ω^a) из п. 10: $\langle \mathscr{D}_a, \omega^b\rangle = \delta^b_a$. Положим

$$\varphi(\Delta_\alpha \otimes \Delta_{\dot\beta}) = \varphi^{a}_{\alpha\dot\beta}\mathscr{D}_a,$$

где φ — форма Фробениуса, введенная в п. 1. Для вычисления коэффициентов $\varphi^{a}_{\alpha\dot\beta}$ воспользуемся определением:

$$\left(\varphi(\Delta_\alpha \otimes \Delta_{\dot\beta}),\ \omega^b\right) = [\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] \mathbin{\lrcorner} \omega^b = \varphi^{a}_{\alpha\dot\beta}\mathscr{D}_a \mathbin{\lrcorner} \omega^b = \varphi^{b}_{\alpha\dot\beta},$$

откуда

$$\varphi^{a}_{ab}{\cdot} = [\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] \mathbin{\lrcorner} \omega^a = [\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] \mathbin{\lrcorner} \left(dx^a - d\theta^\gamma X^a_\gamma - d\theta^{\dot\delta} X^a_{\dot\delta}\right).$$

Формулы для Δ_α, $\Delta_{\dot\beta}$ из леммы 9 показывают, что $[\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}]$ является линейной комбинацией ∂_a, так что определение $\varphi^{a}_{\alpha\dot\beta}$ можно переписать в виде

$$[\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] = \varphi^{a}_{\alpha\dot\beta}\,\partial_a.$$

Выражения через H^a удобно искать так: $\Delta_\alpha(x^b - iH^b) = 0$, откуда $\Delta_\alpha x^b = i\Delta_\alpha H^b$ и $\Delta_{\dot\beta}\Delta_\alpha x^b = i\Delta_{\dot\beta}\Delta_\alpha H^b$. Аналогично, $\Delta_{\dot\beta}(x^b + iH^b) = 0$ и $\Delta_\alpha\Delta_{\dot\beta} x^b = -i\Delta_\alpha\Delta_{\dot\beta} H^b$. Окончательно,

$$\varphi^{a}_{\alpha\dot\beta} = -i\,\{\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}\}\,H^a. \tag{4}$$

Напомним, что $\{\ ,\ \}$ — суперантикоммутатор; применительно к нечетным дифференцированиям Δ_α, $\Delta_{\dot\beta}$ он выглядит как коммутатор.

Основная аксиома суперконформной структуры — максимальная невырожденность формы Фробениуса, т. е. обратимость матрицы вторых спинорных производных от H^a. (Иногда вместо $\varphi^a_{\alpha\dot\beta}$ переходят к $\varphi^a_b = \sigma_b^{\alpha\dot\beta}\varphi^a_{\alpha\dot\beta}$: у этой матрицы строки и столбцы перенумерованы одинаково.)

14. Вычисление $\varepsilon_{l,r}$. Основные вычисления изоморфизмов, описанных в предложении 2, которые относятся к березинианам, мы проведем в двойственной форме, для $\mathcal{T}$ вместо Ω^1. Это дает некоторую экономию на Π и дуализациях.

Из следствия 11 находим точные последовательности

$$0\to\mathcal{T}_{l,r}M\to\pi^*_{l,r}\mathcal{T}M_{l,r}\to\mathcal{T}_0M\to 0.$$

Положим

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{l,a} = l_a^b\pi_l^*\left(\frac{\partial}{\partial x_l^b}\right),\quad \widetilde{\mathcal{D}}_{r,a} = r_a^b\pi_r^*\left(\frac{\partial}{\partial x_r^b}\right),$$

где

$$l_a^b = \delta_a^b + i\partial_aH^b,\quad r_a^b = \delta_a^b - i\partial_aH^b. \tag{5}$$

Мы утверждаем, что образцы $\widetilde{\mathcal{D}}_{l,a}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_{r,a}$ в $\mathcal{T}_0M$ совпадают с $\mathcal{D}_a$. В самом деле, для этого нужно проверить, что $\widetilde{\mathcal{D}}_{l,a}\lrcorner\,\omega^c = \delta_a^c = \widetilde{\mathcal{D}}_{r,a}\lrcorner\,\omega^c$, а это вытекает из выражений ω^c через dx_l^a, dx_r^a, данных в следствии 11.

Теперь в $\pi^*_{l,r}\mathcal{T}M_{l,r}$ у нас есть по два базиса и матрицы перехода между ними:

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\mathcal{D}}_{l,a}\\ \Delta_\alpha\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} l_a^b & 0\\ \hline X_\alpha^b & \delta_\alpha^\beta\end{array}\right)\begin{pmatrix}\pi_l^*\left(\partial/\partial x_l^b\right)\\ \pi_l^*\left(\partial/\partial\theta_l^\beta\right)\end{pmatrix},$$

и аналогично для $\mathcal{T}M_r$, откуда

$$\begin{aligned} D\left(\widetilde{\mathcal{D}}_{l,a},\Delta_\alpha\right) &= \det\left|l_a^b\right|\pi_l^*D\left(\frac{\partial}{\partial x_l^a},\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right),\\ D\left(\widetilde{\mathcal{D}}_{r,a},\Delta_{\dot\alpha}\right) &= \det\left|r_a^b\right|\pi_r^*D\left(\frac{\partial}{2x_r^a},\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot\alpha}}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Мы можем написать в координатах основное отождествление из предложения 2: $\pi_l^*\,\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}M_l = (\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}_lM)^{-1}\otimes$ $\otimes(\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}_rM)^{-2}$:

$$D\left(\widetilde{\mathcal{D}}_{l,a},\Delta_\alpha\right) = D\left((\varphi^{-1})_a^{\alpha\dot\beta}\,\Delta_\alpha\otimes\Delta_{\dot\beta},\Delta_\alpha\right) =$$

$$= (\det\varphi)^{-1}D(\Delta_\alpha)^{-1}D\left(\Delta_{\dot\beta}\right)^{-1},$$

где φ — форма Фробениуса, вычисленная в предыдущем пункте, и аналогично

$$D\left(\widetilde{\mathscr{D}}_{r,a}, \Delta_{\dot{\alpha}}\right) = (\det\varphi)^{-1} D(\Delta_\alpha)^{-2} D\left(\Delta_{\dot{\beta}}\right)^{-1}.$$

Подставив эти равенства в (6), получим

$$\pi_l^* D\left(\frac{\partial}{\partial x_l^a}, \frac{\partial}{\partial \theta_l^\alpha}\right) = \left(\det l_a^b\right)^{-1} (\det\varphi)^{-1} D(\Delta_\alpha)^{-1} D(\Delta_{\dot{\beta}})^{-2},$$

$$\pi_r^* D\left(\frac{\partial}{\partial x_r^a}, \frac{\partial}{\partial \theta_r^\alpha}\right) = \left(\det r_a^b\right)^{-1} (\det\varphi)^{-1} D(\Delta_\alpha)^{-2} D(\Delta_{\dot{\beta}})^{-1}.$$

Отождествим $D\left(\frac{\partial}{\partial x_l^a}, \frac{\partial}{\partial \theta_l^\alpha}\right)$ с сечением $\operatorname{Ber}\mathscr{T}M_l$, двойственным к сечению $D^*\left(d\theta_l^\alpha, dx_l^a\right)$ пучка $\operatorname{Ber}^*\Omega^1 M_l$, и аналогично для M_r. Тогда формулы для $v_{l,r}$ примут вид

$$\begin{aligned}
\pi_l^*(v_l) &= \Phi_l^3 \pi_l^* D^*\left(d\theta_l^\alpha, dx_l^a\right) = \\
&= \Phi_l^3 \det\left(l_a^b\right) \det\varphi\, D(\Delta_\alpha)\, D\left(\Delta_{\dot{\beta}}\right)^2, \\
\pi_r^*(v_r) &= \Phi_r^3 \pi_r^* D^*\left(d\theta_r^{\dot{\alpha}}, dx_r^a\right) = \\
&= \Phi_r^3 \det\left(r_a^b\right) \det\varphi\, D(\Delta_\alpha)^2\, D\left(\Delta_{\dot{\beta}}\right),
\end{aligned} \tag{7}$$

откуда, наконец,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_l &= \left(\pi_l^* v_l\right)^{1/3} \otimes \left(\pi_r^* v_r\right)^{1/3} = \\
&= \Phi_l \Phi_r^{-2} \left(\det l_a^b\right)^{1/3} \left(\det r_a^b\right)^{-2/3} (\det\varphi)^{-1/3} D(\Delta_\alpha)^{-1}, \\
\varepsilon_r &= \left(\pi_l^* v_l\right)^{-2/3} \otimes \left(\pi_r^* v_r\right)^{1/3} = \\
&= \Phi_l^{-2} \Phi_r \left(\det l_a^b\right)^{-2/3} \left(\det r_a^b\right)^{1/3} (\det\varphi)^{-1/3} D\left(\Delta_{\dot{\beta}}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

15. Структурные реперы. Назовем структурным репером суперпространства M любой локальный базис векторных полей на M вида

$$\left(\widetilde{\Delta}_\alpha, \widetilde{\Delta}_{\dot{\alpha}}, \frac{i}{2}\left[\widetilde{\Delta}_\alpha, \widetilde{\Delta}_{\dot{\alpha}}\right]\right), \text{ где } D\left(\widetilde{\Delta}_\alpha\right) = \varepsilon_l^{-1}, \quad D\left(\widetilde{\Delta}_{\dot{\alpha}}\right) = \varepsilon_r^{-1}.$$

Всякой приспособленной системе координат отвечает структурный репер, для которого

$$\widetilde{\Delta}_\alpha = F\Delta_\alpha, \quad \widetilde{\Delta}_{\dot{\alpha}} = F^\rho \Delta_{\dot{\alpha}}.$$

Функции F, F^ρ находятся из формул (8):

$$F = \Phi_l^{1/2}\Phi_r^{-1}\left(\det l_a^b\right)^{1/6}\left(\det r_a^b\right)^{-1/3}(\det\varphi)^{-1/6},$$

$$F^\rho = \Phi_l^{-1}\Phi_r^{1/2}\left(\det l_a^b\right)^{-1/3}\left(\det r_a^b\right)^{1/6}(\det\varphi)^{-1/6}.$$

16. Лагранжиан. Согласно определению и формулам (6) имеем

$$w = \left[\pi_l^*(v_l)\otimes\pi_r^*(v_r)\right]^{1/3} =$$

$$= \Phi_l\Phi_r(\det\varphi)^{2/3}\det\left(1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right)^{1/3} D(\Delta_\alpha)\,D(\Delta_{\dot\beta}).$$

Здесь $\det\left(1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right) = \det\left(l_a^b\right)\det\left(r_a^b\right)$ в силу определений (5).

Эта формула для лагранжиана не является окончательной: мы должны выразить $D(\Delta_\alpha)D(\Delta_{\dot\beta})$ через $D^*\left(d\theta^\alpha, d\theta^{\dot\alpha}, dx^a\right)$, чтобы иметь возможность непосредственно пользоваться формулой для интеграла Березина, определяющей действие, писать уравнения Эйлера — Лагранжа и т. п.

Действуя, как в начале п. 14, рассмотрим точную последовательность $0\to\mathcal{T}_lM\oplus\mathcal{T}_rM\to\mathcal{T}M\to\mathcal{T}_0M\to 0$. Из определений очевидно, что ∂_a отображается в $\mathcal{D}_a$, ибо $\partial_a \lrcorner\, \omega^b = \delta_a^b$. Поэтому из матрицы пересчета двух базисов $\mathcal{T}M$

$$\begin{pmatrix}\partial_a\\ \Delta_\alpha\\ \Delta_{\dot\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & 0 & 0\\ X_\alpha^a & E & 0\\ X_{\dot\alpha}^a & 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_a\\ \partial_\alpha\\ \partial_{\dot\alpha}\end{pmatrix}$$

находим

$$D\left(\partial_a, \partial_\alpha, \partial_{\dot\alpha}\right) = D\left(\partial_a, \Delta_\alpha, \Delta_{\dot\alpha}\right) =$$

$$= D\left(\left(\varphi^{-1}\right)_a^{\alpha\dot\alpha}\left(\Delta_\alpha\otimes\Delta_{\dot\alpha}\right), \Delta_\alpha, \Delta_{\dot\alpha}\right) = (\det\varphi)^{-1}D(\Delta_\alpha)^{-1}D\left(\Delta_{\dot\alpha}\right)^{-1},$$

или $\quad D(\Delta_\alpha)\,D\left(\Delta_{\dot\alpha}\right) = (\det\varphi)^{-1}D^*\left(d\theta^\alpha, d\theta^{\dot\alpha}, dx^a\right),\quad$ откуда

$$w = \Phi_l\Phi_r(\det\varphi)^{-1/3}\det\left(1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right)^{1/3} D^*\left(d\theta^\alpha, d\theta^{\dot\alpha}, dx^a\right).$$

Пусть L — плотность действия, т. е. коэффициент при D^* в этом выражении. Пусть далее E_B^A — матрица перехода от голономного репера $(\partial_a, \partial_\alpha, \partial_{\dot\alpha})$ к структурному $\left(\frac{i}{2}\left[\tilde\Delta_\alpha, \tilde\Delta_{\dot\alpha}\right], \tilde\Delta_\alpha, \tilde\Delta_{\dot\alpha}\right)$. Тогда из приведенных формул без труда получаем формулу

Весса — Зумино:

$$L = {}^1/_8 \operatorname{Ber}\left(E^A_B\right).$$

17. Калибровка Весса — Зумино. Калибровка Весса — Зумино определяется такой приспособленной системой координат, в которой $\Phi_l = 1$, $\Phi_r = 1$, а потенциал H^a имеет следующий вид:

$$H^a\left(x, \theta^\alpha, \theta^{\dot\alpha}\right) = \theta^\alpha\theta^{\dot\alpha}e^a_{\alpha\dot\alpha} + \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\theta^{\dot\alpha}\theta^{\dot\beta}\theta^\gamma\psi^a_\gamma + \\ + \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta\theta^{\dot\gamma}\psi^a_{\dot\gamma} + \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\theta^\alpha\theta^\beta\theta^{\dot\alpha}\theta^{\dot\beta}A^a.$$

Согласно компонентному анализу в этой калибровке структура суперпространства M определяется следующим набором классических полей на $M_{\rm rd}$: $\left(16 \text{ компонент тетрады } e^a_{\alpha\dot\alpha}\right) + \left(16 \text{ компонент полей } \psi^a_\gamma, \psi^a_{\dot\gamma} \text{ спина } {}^3/_2\right) +$ (вспомогательное поле A^a). Поле A^a выпадает в силу уравнений движения; суперлагранжиан w будет линейной комбинацией лагранжианов Гильберта — Эйнштейна и Рариты — Швингера, умноженных на $\theta^0\theta^1\theta^{\dot 0}\theta^{\dot 1}$ и дивергенции.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ К ГЛАВЕ 5

Работы Гольфанда — Лихтмана [13] и Волкова [9] были первыми работами по теории супергеометрии. Обзор физических мотивировок и результатов по состоянию на 1975 г. дан в статье Огиевецкого и Мезинческу [25]; см. также популяризацию [34]. Физическая литература по суперсимметрии и супергравитации насчитывает сейчас уже тысячи работ и быстро растет. Отметим один из последних обзоров [89] и сборники [103], [104], которые помогут читателю двигаться дальше; на русском языке см. [11], где содержится, в частности, перевод работы [115], а также [32].

Наше изложение теории суперсимметричных уравнений Янга — Миллса основано на второй части статьи Виттена [117]. Супертвисторы были введены Фербером [63]. Материал §§ 4—6 взят из работ автора [23] и [24], где было впервые показано, что метод монад позволяет строить неавтодуальные решения уравнений Янга — Миллса, обычных и суперсимметричных. По поводу суперсимметричных инстантонов см. [9] и [31].

Модель простой супергравитации, описанная в § 7, основана на работе Огиевецкого и Сокачева [26] в форме, которую предложил А. А. Бейлинсон (устное сообщение). См. [11], [103], [104], [100] по поводу альтернативных версий.

Геометрия супегравитации, особенно расширенной, представляет собой одно из самых увлекательных математических открытий последнего десятилетия, совершенных физиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейлинсон А. А. Когерентные пучки на P^n и проблемы линейной алгебры.— Функц. анал. и его прил., 1978, т. 12, в. 3, с. 68—69.
2. Бейлинсон А. А., Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Инстантон определяется своими комплексными особенностями.— Функц. анал. и его прил., 1980, т. 14, в. 2. с. 48—49.
3. Белавин А. А., Захаров В. Е. Уравнения Янга — Миллса как обратная задача рассеяния.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 608—611.
4. Березин Ф. А. Математические основы суперсимметричных теорий поля.— Яд. физ., 1979, т. 29, в. 6, с. 1670—1686.
5. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Алгебраические расслоения на P^n и задачи линейной алгебры.— Функц. анал. и его прил., 1978, т. 12, в. 3, с. 66—67.
6. Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А. Интегральные формы и формула Стокса на супермногообразиях.— Функц. анал. и его прил., 1977, т. 11, в. 1, с. 55, 56.
7. Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А. Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях.— Функц. анал. и его прил., 1977, т. 11, в. 3, с. 70, 71.
8. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А. Инстантонная азбука.— УФН, 1982, т. 136, в. 4, с. 553—592.
9. Волков Д. В., Акулов В. П. О возможном универсальном взаимодействии нейтрино.— Письма в ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 621—623.
10. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах.— Современные проблемы математики, т. 16, М.: ВИНИТИ, 1980, с. 53—226.
11. Геометрические идеи в физике, сб. переводов (под ред. Ю. И. Манина).— М.: Мир, 1983.
12. Гиндикин С. Г., Хенкин Г. М. Преобразование Пенроуза и комплексная интегральная геометрия.— Современные проблемы математики, т. 17, М.: ВИНИТИ, 1981, с. 57—111.
13. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности.— Письма в ЖЭТФ. 1971, т. 13, с. 452—455.
14. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И. Описание инстантонов II.— Труды Межд. сем. по физике высоких энергий.— Серпухов, 1978, с. 71—92.
15. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И. Инстантоны и пучки на CP^3.— Функ. анал. и его прил., 1979, т. 13, № 2, с. 59—74.
16. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И. Поля Янга — Миллса, инстантоны, тензорные произведения инстантонов.— Яд. физ., 1979, т. 29, в. 6, с. 1646—1653.

17. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.
18. Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий.— УМН, 1980, т. 35, в. 1, с. 3—57.
19. Лейтес Д. А. Спектры градуированно-коммутативных колец.— УМН, 1974, т. 29, в. 3, с. 209, 210.
20. Манин Ю. И. Калибровочные поля и голоморфная геометрия.— Современные проблемы математикп, т. 17, М.: ВИНИТИ, 1981, с. 3—55.
21. Манин Ю. И., Пенков И. Б. Нулевые геодезические комплексных пространств Эйнштейна.— Функц. анал. и его прил., 1982, т. 16, в. 1, с. 78—79.
22. Манин Ю. И., Хенкин Г. М. Уравнения Янга — Миллса — Дирака как уравнения Коши — Римана на пространстве твисторов.— Яд. физ., 1982, т. 35, в. 6, с. 1610—1626.
23. Манин Ю. И. Флаговые суперпространства и суперсимметричные уравнения Янга — Миллса.— Труды межд. сем. по пробл. физики высоких энергий.— Протвино, 1982, с. 46—73.
24. Манин Ю. И. Новые точные решения и когомологический анализ обычных и суперсимметричных уравнений Янга — Миллса.— Труды МИАН им. Стеклова, т. 165, 1984, с. 98—114.
25. Огиевецкий В. И., Мезинческу Л. Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя.— УФН, 1975, т. 117, № 4, с. 637—700.
26. Огиевецкий В. И., Сокачев Э. С. Простейшая группа супергравитации Эйнштейна.— Ядерн. физ., 1980, т. 31, в. 1, с. 264—279.
27. Огиевецкий В. И., Сокачев Э. С. Гравитационное аксиальное суперполе и формализм дифференциальной геометрии.— Ядерн. физ.— 1980, т. 31, в. 3, с. 821—939.
28. Огиевецкий В. И., Сокачев Э. С. Нормальная калибровка в супергравитации.— Ядерн. физ. 1980, т. 32, в. 3, с. 862—869.
29. Огиевецкий В. И., Сокачев Э. С. Кручение и кривизна в терминах аксиального суперполя.— Ядерн. физ., 1980, т. 32, в. 3, с. 870—879.
30. Пенков И. Б. Линейные дифференциальные операторы и когомологии аналитических пространств.— УМН, 1982, т. 37, в. 4, 171—178.
31. Семихатов А. М. Суперсимметричный инстантон.— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 35, в. 10, с. 452—455.
32. Славнов А. А. Суперсимметричные калибровочные теории и их возможные приложения к слабым и электромагнитным взаимодействиям.— УФН, 1978, т. 124, № 3, с. 487—508.
33. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1976.
34. Фридман Д., Ньювенхейзен П. ван. Супергравитация и унификация законов физики.— УФН, 1979, т. 128, № 1, с. 135—156.
35. Хенкин Г. М. Представление решений φ^4-уравнения в виде голоморфных расслоений над пространством твисторов.— ДАН СССР, 1981, т. 260, № 5, с. 1086—1088.
36. Хенкин Г. М. Поля Янга — Миллса — Хиггса как голоморфные векторные расслоения.— ДАН СССР, 1982, т. 265, № 5, с. 1081—1085.
37. Хоанг Ле Минь. О твисторной интерпретации функции Грина для неавтодуального поля Янга — Миллса.— УМН, 1983.

38. Шандер В. Н. Векторные поля и дифференциальные уравнения на супермногообразиях.— Функц. анал. и его прил., 1980, т. 14, № 2, с. 91—92.
39. Advances in twistor theory: Ed. Hughston L. P., Ward R. S.— London: Pitman, 1979.
40. Atiyah M. F., Ward R. S. Instantons and algebraic geometry. Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 117—124.
41. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in fourdimensional Riemannian geometry.— Proc. R. Soc. Lond. A., 1978, v. 362, p. 425—461.
42. Atiyah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. J., Manin Yu. I.— Construction of instantons.— Phys. Letters, 1978, v. 65A, № 3, p. 185—187.
43. Atiyah M. F. Geometry of Yang — Mills fields: Lezioni Fermiani.— Pisa, 1979.
44. Atiyah M. F., Jones J. S. D. Topological aspect of Yang — Mills theory— Comm. Math. Phys., 1978, v. 61, p. 97—118.
45. Atiyah M. F. Green's functions for self-dual four manifolds.— Advances in Math., 1981, v. 7A, 130—158.
46. Barth W. Moduli of vector bundles on the projective plane.— Inv. Math., 1977, v. 42, p. 63—91.
47. Barth W., Hulek K. Monads and moduli of vector bundles.— Manuscr. Math., 1978, v. 25, p. 323—347.
48. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. Pseudo-particle solutions of the Yang — Mills equations.— Phys. Lett., 1975, v. 59B, № 1, p. 85—87.
49. Bott R. Homogeneous vector bundles.— Ann. Math., 1957, v. 66, 203—248.
50. Buchdahl N. P. Analysis on analytic spaces and non-self-dual Yang — Mills fields. Preprint.— Oxford, 1982.
51. Buchdahl N. P. On the relative de Rham sequence. Preprint.— Oxford, 1982.
52. Complex manifold techniques in theoretical physics/Ed. Lerner D. E., Sommers P. D.— London: Pitman, 1979.
53. Corrigan E., Goddard P. A n-monopole solution with $4n-1$ degrees of freedom.— Comm. Math. Phys. 1981, v. 80, p. 575—587.
54. Corvin L., Ne'eman J., Sternberg S. Graded Lie algebras in mathematics and physics.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 573—604.
55. Deligne P. Equations differentielles à points singuliers reguliers.— Lecture Notes in Math., v. 163: Springer-Verlag, 1970.
56. Demazure M. A very simple proof of Bott's theorem.— Inv. Math., 1976, v. 33, f. 3, 271—275.
57. Donaldson S. K. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds. Preprint, 1982.
58. Douady A., Verdier J. L. Les équations de Jang — Mills. Séminaire ENS. 1977—78.— Astérisque, 71—72, 1980.
59. Drinfeld V. G., Manin Yu. I. A description of instantons.— Comm. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 177—182.
60. Eastwood M. G., Penrose R., Wells R. O. Cohomology and massless fields.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 78, p. 305—351.
61. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Gravitation, gauge theory and differential geometry.— Phys. Rep., 1980, v. 66, № 6, 213—393.

62. Eguchi T., Hanson A. Asymptotically flat solutions to Euclidean gravity.— Phys. Lett., 1978, v. 74B, p. 249—251.
63. Ferber A. Supertwistors and conformal supersymmetry.— Nucl. Phys., 1978, v. B132, p. 55—64.
64. Fischer G. Complex analytic geometry.— Lecture Notes in Math., v. 538: Springer-Verlag, 1976.
65. Flaherty E. J. Hermitian and Kählerian geometry in relativity.— Lecture Notes in Physics, v. 46.— Berlin, Springer-Verlag: 1976.
66. Grauert H., Kerner. Deformationen von Singularitaten Komplexer Räume.— Math. Ann., 1964, v. 153, p. 236—260.
67. Griffiths P. A. The extension problem in complex analysis. II.— Am. Journ. Math., 1966, v. 88, p. 366—446.
68. Hansen R. O., Newman E. T., Penrose R., Tod K. P. The metric and curvature properties of $\mathscr{H}$-space.— Proc. R. Soc. Lond., 1978, v. A363, p. 445—468.
69. Helgason S. The Radon transform.— Boston: Birkhäuser, 1980.
70. Henkin G. M., Manin Yu. I., Twistor description of classical Yang — Mills — Dirac fields.— Phys. Letters, 1980, v. 95B, № 3, 4, p. 405—408.
71. Henkin G. M. Manin Yu. I. On the cohomology of twistor flag spaces.— Comp. Math., 1981, v. 44, fasc. 1—3, p. 103—111.
72. Hitchin N. J. Linear field equations on self-dual spaces.— Proc. R. Soc. Lond., 1980, v. A370, p. 173—191.
73. Hitchin N. J. Polygons and gravitons.— Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1979, v. 85, p. 465—476.
74. Hitchin N. J. Kählerian twistor spaces.— Proc. Lond. Math. Soc., 1981, v. 43, p. 133—150.
75. Hitchin N. J. Monopoles and geodesics.— Comm. Math. Phys. 1982, v. 83, p. 579—602.
76. Hitchin N. J. On the construction of monopoles. Preprint.— Oxford, 1982.
77. Illusie L. Complexe Cotangent et deformations. I.— Lect. Notes in Math., v. 239: Springer-Verlag, 1971.
78. Isenberg J., Yasskin Ph. B., Green P. S. Non-self-dual gauge fields.— Phys. Letters, 1978, v. 78B, № 4, p. 464—468.
79. Jaffe A., Taubes C. Vortices and monopoles.— Boston: Birkhäuser, 1980.
80. Kac V. G. Lie superalgebras.— Adv. Math., 1977, v. 26, p. 8—96.
81. Kostant B. Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization.— Lecture Notes in Math., № 570, p. 177—306: Springer-Verlag, 1977.
82. Le Brun C. R. Spaces of Complex Geodesics and related structures. Thesis.— Oxford, 1980.
83. Le Brun C. R. The first formal neighbourhood of ambitwistor space for curved space time.— Lett. Math. Phys., 1982, v. 6, p. 345—354.
84. Le Brun C. R. Spaces of complex null geodesic in complex-riemannian geometry. Preprint IHES/M/82/7, 1982.
85. Le Brun C. R. $\mathscr{H}$-space with a cosmological constant.— Proc. R. Lond. Soc., 1982, v. A380, p. 171—185.
86. Manin Yu. I., Penkov I. B. The formalism of left and right connections on supermanifold.— Proc. Summer School in Phys.— Varna, 1982.

87. Nahm W. All selfdual multimonopoles for arbitrary gauge groups. Preprint CERN TH. 3172, 1981.
88. Nahm W. The algebraic geometry of multimonopoles. Preprint, Bonn University, 1982.
89. Nieuwenhuizen P. van. Supergravity.— Phys. Rep., 1981, v. 68, № 4, p. 189—398.
90. Okonek Ch., Schneider M., Spindler H. Vector bundles on complex projective spaces.— Boston: Birkhäuser, 1980.
91. Penkov I. B. The Penrose transform on general Grassmannians.— C. R. Ac. bulgare de Sci., 1980, t. 3, № 11, p. 1439—1442.
92. Penkov I. B. $\mathscr{D}$-modules on supermanifolds.— Inv. Math. v. 71, f. 3, p. 501—512.
93. Penrose R. Solutions of the zero-rest-mass equations.— J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 38—39.
94. Penrose R. Twistor theory, its aims and achievements.— In: Quantum gravity/Ed C. J. Isham et al.— Oxford: Oxford University Press, 1975.
95. Penrose R. Nonlinear gravitons and curved twistor theory.— Gen. rel. grav., 1976, № 7, p. 31—52.
96. Penrose R. The twistor program.— Rep. Math. Phys., 1977, v. 12, p. 65—76.
97. Reiffen H. S. Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differential-formen auf komplexer Raume.— Math. Zeitschr., 1967, v. 101, p. 269—284.
98. Scheunert M. The theory of Lie superalgebras.— Lecture Notes in Math., v. 716; Springer-Verlag, 1979.
99. Schwarz A. S. Instantons and fermions in the field of instanton.— Comm. Math. Phys., 1979, v. 64, p. 233—268.
100. Schwarz A. S. Supergravity, Complex geometry and G-structures.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 87, p. 37—63.
101. Self-dual Riemannian Geometry and Instantons/Ed. by Th. Friedrich.— Leipzig: Teubner, 1981.
102. Sternberg S. On the role of field theories in our physical conception of geometry.— Lecture Notes in Math., v. 676, p. 1—80: Springer-Verlag, 1978.
103. Supergravity/Ed. by Nieuwenhuizen P. van, Freedman D. Z.— Amsterdam: North Holland, 1979.
104. Superspace and supergravity/Ed. by Hawking S. W., Roček M.— Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
105. Taubes C. H., Self-dual Yang — Mills connections on non-self-dual 4-manifolds.— Journ. Diff. Geom., 1982, v. 17, p. 139—170.
106. Todorov I. T. Conformal description of spinning particles. Preprint ISAS — Trieste, 1981.
107. Ueno K.. Nakamura Y. Transformation theory for anti-self-dual equations. Preprint RIMS 413.— Kyoto, 1982.
108. Ward P. S. On self-dual gauge fields.— Phys. Lett., 1977, v. 61A, p. 81—82.
109. Ward R. S. A class of self-dual solutions of Einstein's equations.— Proc. R. Soc. Lond., 1978, v. A363, p. 289—295.
110. Ward R. S. Self-dual space-times with cosmological constant, Comm. Math. Phys., 1980, v. 78, № 1, p. 1—17.
111. Ward R. S. Ansätze for self-dual Yang — Mills fields.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 80, p. 563—574.

112. Wells R. O. Complex manifolds and mathematical physics.— Bull. Amer. Math. Soc., 1979, v. 1, p. 296—336.
113. Wells R. O. Hyperfunction solutions of the Zero-Mass field equations.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 78. p. 567—600.
114. Wells R. O., Complex geometry in mathematical physics: Les presses de l'université de Montréal, 1982.
115. Wess J. Supersymmetry — supergravity.— Lecture Notes in Physics, v. 77, p. 81—125. Springer-Verlag, 1978.
116. Weyl H. Gravitation und Elektrizität.— 1918, Sitzungsberichte Königl. Preuss Akad. Wiss. Berlin, S. 465—480.
117. Witten E. Introduction to supersymmetry. Preprint, 1982.
118. Witten E. An interpretation of classical Yang — Mills theory.— Phys. Letters, 1978, v. 78B, № 4, p. 394—398.
119. Yang C. N., Mills R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191—195.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автодуальное ГС-многообразие 65
— уравнение Янга — Миллса 65
Автодуальные формы 87

Березиниан 193

Грассманиан 14
— относительный 21
Грассмановы спиноры 64
ГС-многообразие 69

Двойственность Демазюра 27
Диаграмма автодуальности 91
— нуль-геодезических 126

Инстантон 97
— аналитический 118
Интеграл Березина 247
Интегральные формы 243

Квадрика Клейна 32
Коническая связность 59
— структура 57
Конус световой 35
Конформная метрика 33
Коэффициенты связности 48

Луч световой 34

Монада 98, 296

Направление нулевое 19

Отображение Плюккера 17

Плоскость нулевая 36
Плотность 251
Поле Янга — Миллса 86
Последовательность де Рама связности 55
Правило знаков 179
Преобразование Радона — Пенроуза 87
Препятствие 135
Продолжение 135
Пространство комплексное 36
— Минковского вещественное 41
— флагов 23
Пространство-время комплексное 74
Пучок ацикличный 30
— касательный грассманиан 18
— положительный 29
— старших форм грассманиана 20
— тавтологический 15

Расщепление 46

Связность 46
— правая на супермногообразии 240
Супералгебры Ли 181
— простые 262
Супергеодезические световые 280
Супергравитация простая 319
Суперграссманиан 224
Супердетерминант 193
Суперкоммутатор 179
Супермногообразие 213
Суперполе 278
Суперпространство флагов 235
Суперслед 192
Супертвисторы 269

Твисторы 32

Форма Фробениуса 52